MODUL IV

MATRIK DAN VEKTOR

KEGIATAN BELAJAR : MATRIK

A. PENDAHULUAN

Tujuan dari kegiatan belajar matrik adalah memahami pengertian dari Matrik dan dapat menggunakan pengetahuan dari matrik untuk mendukung hal hal yng berkaitan dengan pengukuran pengukuran tanah, hitung perataan dan kegiatan perkuliahan lainnya. Isi dari Modul IV terdiri dari Pengertian Matrik dan Vektor, Jenis-jenis Matrik, Operasi Matrik, Partisi Matrik, Harga Determinan suatu matrik, Transformasi Linier, Transformasi Elementer, Rank, dan Matrik Invers. Pada Modul ini akan dibahas terlebih dahulu materi tentang Matrik dahulu, karena dipandang bahwa Matrik merupakan dasar dari meteri Vektor.

Dalam mempelajari materi pokok Matrik diperlukan dasar yang harus dikuasai secara baik materi aritmatika dan persamaan dan fungsi. Operasi aritmatika terdiri dari penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, dan pemangkatan. Sedangkaan fungsi dan persamaan khususnya pada persamaan linier. Matrik banyak digunakan pada cabang ilmu dan yang merupakan kelebihan dari matrik dapat menghemat tempat, dengan data yang berbentuk matrik akan lebih mudah untuk dibaca, dibandingkan apabila datanya masih berupa data mentah yang belum di analisis. Matrik termasuk suatu analisis atau penyederhanaan data.

B. PENGERTIAN MATRIK

Matrik ialah kumpulan angka-angka atau elemen-elemen yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk empat persegi panjang, dimana panjang dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom dan banyaknya baris. Matrik dituliskan dalam tanda kurung atau kurung besar. Matrik ditulis dalam bentuk huruf besar. Matrik tidak mempunyai harga, matrik hanyalah sekumpulan data yang dituliskan dengan syarat tertentu.

Matrik dapat digunakan untuk mencari hubungan antara variable-variabel. Dengan matrik dapat dipecahkan nilai nilai variabelnya yang mungkin terdiri dari puluhan persamaan yang terdiri dari puluhan variabelnya, dan harus dihitung nilai-nilai parameter (koefisiennya) yang juba berjumlah puluhan bahkan mungkin ratusan. Sehingga penggunaan matrik akan lebih efisien dalam penyusunan data dan lebih mudah dalam pengambilan keputusan.

Dalam mempelajari statistika terutama dalam regresi berganda , dan juga dalam memecahkan program linier sangat diperlukan peran dari Matrik. Dalam ilmu pengukuran terutama pada ilmu hitung perataan kesalahan sangat diperlukan peran dari aljabar matrik.

Definisi :Suatu Matrik A yang terdiri dari m baris dan n kolom dituliskan sebagai berikut:

$$
Amxn = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & & . \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \begin{array}{l} i = 1,2,3, \dots, m \\ j = 1,2,3, \dots, n \end{array}
$$

Contoh Penggunaan Matrik :

Data hasil suatu penelitian pada tiga Kantor Pertanahan (A,B,C) jumlah dan pendidikan juru ukur adalah sebagai berikut :

1. Pada Kantor Pertanahan Kabupaten A yang berpendidikan SLTA sebanyak 7 orang, yang berpendidikan Diploma I PPK sebanyak 15 orang, dan yang berpendidikan sarjana sebanyak 9 orang.

2. Pada Kantor Pertanahan Kabupaten B yang berpendidikan SLTA sebanyak 2 orang, yang berpendidikan Diploma I PPK sebanyak 19 orang, dan yang berpendidikan sarjana sebanyak 11 orang.
3. Pada Kantor Pertanahan Kabupaten C yang berpendidikan SLTA sebanyak 4 orang, yang berpendidikan Diploma I PPK sebanyak 17 orang, dan yang berpendidikan sarjana sebanyak 8 orang.

Tabel 1 Keadaan Jumlah Juru Ukur menurut Pendidikan dan Tempat Kerja

Pendidikan / Kabupaten	SLTA	Diploma I PPK	Sarjana/Diploma IV
A	7	15	9
B	2	19	11
C	4	17	8

Apabila ditulis dalam bentuk Matrik adalah sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 15 & 9 \\ 2 & 19 & 11 \\ 4 & 17 & 8 \end{pmatrix}$$

Dari ketiga bentuk uraian data diatas terlihat yang paling sederhana dan paling hemat dalam penulisannya apabila data tersebut ditulis dalam bentuk Matrik.

C. JENIS JENIS MATRIK

1. Matrik Bujur Sangkar (Square Matrix) :

Matrik bujur sangkar adalah matrik yang jumlah baris dan jumlah kolomnya sama (m=n)

Apabila suatu matrik mempunyai baris = n dan kolom = n maka disebut sebagai matrik bujur sangkar ordo n.

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}11 & \mathbf{a}12 & \mathbf{a}13 \\ \mathbf{a}21 & \mathbf{a}22 & \mathbf{a}23 \\ \mathbf{a}31 & \mathbf{a}32 & \mathbf{a}33 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

A dan B merupakan Matrik bujur sangkar ordo 3.

Matrik Bujur Sangkar disebut juga sebagai matrik Kwadrat.

2. Matrik Identitas (Identity Matrix) :

Matrik Identitas atau disebut juga matrik satuan adalah matrik bujur sangkar dimana elemen-elemen diagonal utama mempunyai harga 1, sedangkan selain elemen pada diagonal utama mempunyai harga 0.

Contoh :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$, merupakan matrik identidas ordo 3.

3. Matrik Diagonal

Matrik Diagonal adalah suatu matrik bujur sangkar dimana elemen-elemen diagonal utama mempunyai nilai $\neq 0$, dan elemen-elemen selain diagonal utama bernilai 0.

$$I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$, merupakan matrik diagonal ordo 3.

4. Matrik Skalar

Matrik Skalar adalah suatu matrik bujur sangkar dimana elemen-elemen diagonal utama bernilai sama dan kelipatan dari 1 (k) dan selain elemen diagonal utama bernilai 0. Atau suatu matrik kelipatan dari matrik identitas (kI)

$$k.I = \begin{pmatrix} \mathbf{k} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{k} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad \text{atau} \quad 6.I = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$ merupakan matrik identidas ordo 3.

4. Matrik Simetris

Matrik A disebut Matrik simetris apabila berbentuk matrik bujur sangkar dengan elemen pada baris ke i akan sama dengan kolom ke i juga.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Dari matrik A diatas terlihat bahwa elemen baris 1 = elemen kolom 1, elemen baria ke 2 = elemen kolom ke 2, elemen baris ke 3 = elemen kolom ke 3, dan elemen baris ke 4 = elemen kolom ke 4.

5. Matrik Null

Matrik A disebut Matrik Null apabila berupa matrik bujur sangkar dan elemen-elemennya semua bernilai Null (0).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, matrik A adalah matrik 0 ber ordo 3

6. Transpose suatu Matrik

Untuk suatu keperluan suatu matrik perlu ditukar baris dan kolomnya, baris ke i menjadi kolom ke i dan baris ke j menjadi kolom ke j.

Definisi : Transpose suatu Matrik Aij ialah suatu matrik baru yang mana elemen-elemennya diperoleh dari matrik A dengan syarat bahwa baris-baris dan kolom-kolom matrik menjadi kolom-kolom dan baris-baris matrik yang baru.

Apabila matrik tersebut berordo m x n, maka matrik baru akan berordo n x m.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrik B diperoleh dari transpose matrik A. Matrik A dengan ordo 3 x 5 menjadi matrik B dengan ordo 5 x 3. Elemen-elemen baris ke 1 dari matrik A menjadi elemen-elemen kolom ke 1 dari matrik B. Elemen-elemen baris ke 2 dari matrik A menjadi elemen-elemen kolom ke 2 dari matrik B. dan elemen-elemen baris ke 3 dari matrik A menjadi elemen-elemen kolom ke 3 dari matrik B.

D. OPERASI MATRIK

Dua buah matrik A dan B disebut sama yaitu A = B apabila matrik A dan matrik B mempunyai jumlah baris dan kolom yang sama, dan nilai elemen-elemennya juga harus sama.

1. Penjumlahan dan pengurangan Matrik.

Suatu matrik A dan matrik B dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila matrik A dan Matrik B mempunyai ordo yang sama. Hasil penjumlahannya atau pengurangannya berupa matrik C dengan ordo yang sama dengan matrik A dan B. Cara penjumlahannya dan pengurangannya yaitu elemen ke ij pada matrik A ditambahkan atau dikurangkan pada elemen ke ij matrik B dan hasilnya pada matrik C pada baris dan kolom ij.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A + B = C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A - B = C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Perkalian Matrik dengan Matrik.

Suatu matrik A dan B dapat dikalikan dan hasilnya adalah matrik C apabila mempunyai syarat banyaknya kolom matrik A sama dengan banyaknya baris matrik B. Misal matrik Amxn dikalikan dengan matrik Bnxp maka A dan matrik B dapat dikalikan, dan hasilnya adalah matrik C dengan ordo mxp.

Dalam hal ini apabila jumlah kolom matrik A = jumlah baris matrik B disebut ***Compormable*** untuk perkalian, yang berati hasil kali matrik A dan B ada.

Perkalian dalam matrik tidak berlaku hukum ***komutatif***, yang artinya AxB ≠ BxA. Matrik AxB ada, dan belum tentu BxA ada. Misalkan pada perkalian matrik A_{4x3}x B_{3x2} hasilnya adalah matrik C_{4x2}. Sedangkan apabila matrik B_{3x2} x A_{4x3} tidak ***Compormable*** pada perkalian, ini berarti matrik B tidak dapat dikalikan dengan matrik A.

Apabila pada suatu saat Matrik A dikalikan matrik B sama dengan matrik B dikalikan matrik A (AB = BA) maka kedua matrik disebut ***Commute.***

Pada matrik berlaku hukum ***komutatif***, yaitu A (B + C) = AB + AC, dan pada matrik juba berlaku hukum Assosiatif, yaitu bahwa A(BC) = (AB)C

Misalkan matrik A_{4x3} dan B_{3x2} maka hasil perkalian antara matrik A dan matrik B adalah matrik C_{4x2}.

Contoh :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = C$$

$$C = \begin{pmatrix} 2x2 + 1x3 + 1x\text{-}1 & 2x1 + 1x2 + 1x4 \\ \text{-}1x2 + 2x3 + 3x\text{-}1 & \text{-}1x2 + 2x2 + 3x4 \\ 1x2 + \text{-}1x3 + 2x\text{-}1 & 1x1 + \text{-}1x2 + 2x4 \\ 3x2 + 2x3 + 1x\text{-}1 & 3x1 + 2x2 + 1x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 1 & 14 \\ -3 & 5 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}$$

2. Perkalian Matrik dengan Skalar.

Apabila Matrik A dikalikan dengan skalar k, ini berarti semau elemen pada matrik A dikalikan dengan skalar k. Apabila $A=(a_{ij})$ maka $k.A=k.(a_{ij}) = (a_{ij}).k$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ maka } \quad 3.A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & -6 \\ 6 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

E. PARTISI MATRIK

Partisi matrik adalah membagi matrik menjadi bagian-bagian yang lebih kecil, juga disebut sebagai sub matrik. Cara atau bentuk pembagian matrik tersebut sesuai dengan keperluan, hal ini dikarenakan dalam operasi matrik perlu syarat-syarat tertentu misalnya untuk penjumlahan, untuk perkalian. Persyaratan untuk penjumlahan tidak sama dengan syarat perkalian matrik A dan B dapat dijumlahkan atau dikurangkan tetapi belum tentu dapat di kalikan, begitu juga sebaliknya. Syarat suatu partisi matrik dapat di kurangkan dan dijumlahkan apabila mempunyai ordo yang sama, sedangkan suatu partisi matrik dapat dikalikan apabila partisi matrik harus ***comformable.***

Kegiatan partisi matrik sering digunakan dalam kegiatan mencari suatu matrik invers. Salah satu metode untuk mencari invers suatu matrik menggunakan metode partisi matrik.

Misalkan terdapat matrik bujur sangkar ordo 4 :

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{11} & A_{12} \end{array}\right)$$

Hasil partisi matrik terlihat pada bagian kanan, dari matrik bujur sangkar ordo 4 akan menjadi 4 buah matrik bujur sangkar yang masing-masing berordo 2. Hasil partisi matrik tidak harus seperti contoh diatas. Hasil partisi matrik dapat berordo berapa saja dan dapat bernentuk apa saja tapi yang jelas hasilnya berupa matrik yang berordo lebih rendah dari matrik induknya.

F. DETERMINAN SUATU MATRIK

Matrik yang mempunyai harga determinan adalah matrik yang hanya berbentuk matrik kwadrat (square matrix). Matrik yang bukan matrik bujur sangkar tidak mempunyai harga determinan. Determinan matrik A dituliskan dengan simbul det (A) atau | A |.

Harga determinan matrik kwadrat ordo 2 :

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ maka harga det (A) = a_{11}x a_{22} + a_{12}x a_{21}

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ maka harga det (A) = 2 x 5 + 3 x 4 = 10 – 12 = -2

Harga determinan matrik kwadrat ordo 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

maka harga determinan matrik A adalah : det (A) = $(a_{11} x\, a_{22}\ x\ a_{33})$+ $(a_{12} x\, a_{23}\ x\ a_{31})$+

$(a_{13} x\, a_{21}\ x\ a_{32})$ - $(a_{13} x\, a_{22}\ x\ a_{31})$ - $(a_{11} x\, a_{23}\ x\ a_{32})$ - $(a_{12} x\, a_{21}\ x\ a_{33})$.

1. Mencari Harga Determinan menggunakan Matrik Kofaktor

Definisi : Suatu matrik kwadrat A dengan n baris dan n kolom dihilangkan baris ke -i dan kolom ke –j, maka determinan matrik kwadrat dengan (n-1) baris dan (n-1) kolom, yaitu sisi matrik yang tinggal (disebut ***Matrik Minor*** dari elemen a_{ij}) dan diberi simbul $|A_{ij}|$. Apabila pada setiap minor kita tambahkan tanda + (plus) atau – (minus) sebagai tanda pada determinan dan kemudian diberi simbul : $(-1)^{i+j}\ |\ A_{ij}\ |$ maka diperoleh apa yang disebut **KOFAKTOR** dari elemen a_{ij} dan biasanya diberi simbul $\mathbf{K_{ij}}$ **.**

$\mathbf{K_{ij}}$ = $(-1)^{i+j}\ |\ A_{ij}\ |$ ini berarti bahwa setiap elemen mempunyai ***kofaktor*** sendiri –sendiri

untuk lebih menyederhanakan rumus harga $(-1)^{i+j}$ dapat diganti tanda + atau – tergantung dari i+j, apabila i+j harganya genap maka tandanya +, sedangkan apabila i+j harganya ganjil maka tandanya –.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 = + & 1+2 = - & 1+3 = + \\ 2+1 = - & 2+2 = + & 2+3 = - \\ 3+1 = + & 3+2 = - & 3+3 = + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Dalil **:** Nilai determinan dari Matrik A sama dengan penjumlahan dari hasil kali semua elemen dari suatu baris (kolom) dari matrik A disebut dengan kofaktor masing-masing

1. Dengan menggunakan elemen-elemen dari baris ke -i

det (A) = |A| = $a_{i1}\ K_{i1} + a_{i2}\ K_{i2} += a_{i3}\ K_{i3} + \dots + a_{in}\ K_{in}$

det (A) = |A| = $\sum_{t=1}^{n}$ **ait.Kit;** i = 1,2,3, …, n

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 4} \\ 5 \quad 1 \quad 2 \\ 3 \quad 2 \quad 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A) =$$

dengan baris ke 1 (i = 1) :

$$K_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$$

$$K_{12} = - \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(5 - 6) = 1$$

$$K_{13} = + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 3 = 7$$

det (A) = $a_{11}\ K_{11} + a_{12}\ K_{12} += a_{13}\ K_{13}$ = 1.(-3) + 2 (1) + 4(7) = -3 + 2 + 28 = 27

2. Dengan menggunakan elemen-elemen dari kolom ke -j

det (A) = |A| = $a_{1j}\ K_{1j} + a_{2j}\ K_{2j} + a_{3j}\ K_{3j} + \dots + a_{nj}\ K_{nj}$

det (A) = |A| = $\sum_{t=1}^{n}$ **atj.Ktj;** j = 1,2,3, …, n

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}} \\ 5 & 1 & \\ 3 & 2 & \end{pmatrix} \qquad \det(A) =$$

dengan kolom ke 3 (j = 3) :

$$K_{13} = + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 3 = 7$$

$$K_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 6) = 4$$

$$K_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 10 = -8$$

det (A) = a_{13} K_{13}+ a_{23} K_{23}+ a_{33} K_{33} = 4.(7) + 2 (4) + 1(8) = 28 + 8 -9= 27

Dalil : Kalau $A^{|}$ merupakan transpose matrik A, maka akan berlaku det (A) = det ($A^{|}$).

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{, maka } A^{|} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Det (A) = 27

Det ($A^{|}$) = 53 - 26 = 27; det (A) = det ($A^{|}$)

Dalil : Kalau semua elemen baris dan kolom suatu matrik A bernilai 0, maka harga det (A) = 0 juga

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{, det (A) = 0}$$

Dalil : Kalau dua baris (kolom) suatu matrik A ditukar, maka harga determinannya akan berubah tanda.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ det (A) = 27}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{; det (B) = } 26 - 53 = -27$$

Dalil : Kalau dua baris (kolom) suatu matrik A sama, maka harga determinannya akan sama dengan 0 (det (A) = 0).

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Det (B) = - 27

Pada matrik C terlihat bahwa baris 1 dan baris 3 elemennya sama.

Harga det (C) = 27 – 27 = 0

Pada matrik D terlihat bahwa kolom 2 dan kolom 3 elemennya sama.

Harga det (D) = 45 – 46 = 0

Dalil : Suatu determinan matrik A tidak akan berubah nilainya kalau salah satu baris (kolom) ditambah baris (kolom) lainnya yang telah dikalikan dengan bilangan konstan k.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 11 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Untuk matrik C, baris ke 2 nya ditambahkan 2 kali baris pertamanya.

Harga det (A) = - 27

Harga det (C) = (60 + 8 + 22) – (5 + 24 + 88) = 90 – 117= -27

Ternyata harga det (A) = det (C).

Dalil : Kalau baris yang ke –i dari suatu matrik kwadrat A dengan n baris dan n kolom yang terdini dari elemen-elemen Binomial, yaitu $a_{i1} + b_{i1}$, $a_{i2} + b_{i2}$, …, $a_{in} + b_{in}$., maka determinan dari matrik A sama dengan penjumlahan dari determinan 2 matrik A_1 dan matrik A_2, dimana matrik A_1 dan matrik A_2 pada baris yang ke –i masing-masing mempunyai elemen-elemen a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, …, a_{in} dan b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} …., b_{in}., sedangkan pada baris lainnya (sisanya) dari dari kedua matrik itu mempunyai elemen-elemen yang sama dengan matrik yang asli.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Det (A) = 53 - 26 = 27

Det (A_1) = 31 – 20 = 11

Det (A_2) = 22 - 6 = 16

Det (A) = Det (A_1) + Det (A_2) = 11 + 16 = 27

Dalil : Kalau matrik A dan B, masing-masing matrik kwadrat dengan n baris dan n kolom, maka det (AB) = det (A) x det (B).

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AxB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Det (A) = 2 -0 -2 -1 -1 -0 = -2, sedangkan Det (B) = 1 -4 -4 +4 = -3

Det (AB) = 18 +15 +0 -15 -12 -0 = 18 – 12 = 6

Det (AB) = det (A) x det (B) = -2 x -3 = 6

G. RUANG VEKTOR (VECTOR SPACE)

Pengertian vektor diperlukan dalam pembahasan matrik, karena pengetahaun matrik berkaitan dengan pengetahuan tentang vektor dan begitu pula sebaliknya.

Definisi : Vektor berdemensi n ialah sustu susunan yang teratur dari elemen-elemen berupa angka-angka sebanyak n buah yang disusun baik menurut baris, dari kiri kekanan disebut sebagai **vektor baris** (*row vector*) maupun menurut kolom, yang tersusun dari atas ke bawah disebut sebagai **vektor kolom** (*column vector*)

$X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, disebut sebagai vektor baris

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$, disebut vektor kolom

Definisi : Yang disebut ruang vektor berdemensi n ialah suatu koleksi yang lengkap (set) dari suatu kumpulan vektor yang berkomponen sebanyak n dimana persyaratan penjumlahan dan perkalain tetap berlaku bagi vektor-vektor ini dan ruang vektor yang merupakan set ini diberi simbul F^n. Vektor dengan komponen sebanyak n, disebut vektor berdemensi n. Jika k suatu scalar dan X berada pada F^n maka kX juga berada di F^n. Kalau X dan Y berada di F^n maka X ± Y juga berada di F^n.

Definisi : Apabila terdapat kumpulan dari vektor-vektor (*set of vectors*) sebanyak m yang masing- masing berdemensi n,dikatakan sebagai $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_m$

dan sebuah lain berdemensi n, disebut vektor A dan apabila berlaku hubungan :

$A = k_1X_1 + k_1X_2 + k_1X_3 + \dots + k_mX_m = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{ki\,Xi}$, dimana k_i = bil. konstan, vektor A disebut **kombinasi linier** (*linier combination*) dari vektor-vektor X_1, X_2, X_3, … , X_m.

Contoh :

$X_1 = (1, 0, 0)$; $X_2 = (0, 1, 0)$, $X_3 = (0, 0, 1)$, dan A (2, 3, 1)

Ternyata $A = 2X_1 + 3X_2 + X_3$

Jadi A merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor X_1, X_2 , X_3 dengan skalar $k_1=2$, $K_2=3$, dan $k_3=1$, dan dapat ditunjukkan bahwa :

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 = 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} X_1 + 3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} X_2 + 1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} X_3$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} X_1 + \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} X_2 + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = A$$

Dalam kumpulan vektor (set of vectors) terdapat dua sifat penting yang dimiliki yaitu yang disebut sebagai **ketergantungan linier** (*linierly dependence*) dan **kebebasan linier** (*linierly independence*).

Definisi : Suatu set of vector sebanyak m, berasal dari ruang vektor F^n , dikatakan ***linierly dependence*** apabila untuk scalar k_1, k_2, k_3, … , k_m, berlaku hubungan sebagai berikut :

$k_1X_1 + k_2X_2 + k_3X_3 + \dots + k_mX_m = 0$, dengan syarat paling tidak satu skalar k, dikatakan k_i tidak sama dengan 0 ($k_i \neq 0$).

Suatu set of vector sebanyak m, berasal dari ruang vektor F^n , dikatakan ***linierly independence*** apabila untuk scalar k_1, k_2, k_3, … , k_m, berlaku hubungan sebagai berikut :

$k_1X_1 + k_2X_2 + k_3X_3 + \ldots + k_mX_m = 0$, dengan syarat semua skalar $k = 0$, yaitu $k_1=k_2=k_3, \ldots, k_m = 0$.

Dalil : Kalau vektor sebanyak m, yaitu $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_m$ ***linierly dependent***, maka salah satu vektor dari set vektor tersebut dapat dinyatakan sebagai ***kombinasi linier*** dari vektor-vektor lainnya.

H. TRANSFORMASI LINIER, TRANSFORMASI ELEMENTER, DAN RANK

1. Transformasi Linier dan non linier

Transformasi linier adalah salah satu bentuk operasi pada matrik yang merupaka hubungan antara variable-variabel lama dengan variable-variabel baru yang merupakan hasil transformasi yang berfungsi untuk memecahkan suatu persoalan. Transformasi ini telah digunakan diatas pada perkalian matrik. Transformasi linier dari variable-variabel dan teori matrik mempunyai hubungan yang sangat dekat.Transformasi linier dapat memberikan interprestasi geometric yang sangat menarik.

Sebagai contoh suatu bentuk Transformasi Linier adalah :

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

kalau ditulis dalam bentuk matrik adalah : $Y = A\,X$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Transformasi $Y = AX$ berarti menggerakkan satu tituk dalam bidang (x_1, x_2) menjadi titik lainnya juda dibidang (x_1, x_2). Transformasi linier dalam bentuk $Y = AX$ mempunyai sifat-sifat, apabila $Y_1 = AX_1$, dan $Y_2 = AX_2$, berlaku:

$Y_1 + Y_2 = AX_1 + AX_2 = A(X_1 + X_2)$

Apabila Y_1 dan Y_2 merupakan image dari X_1 dan X_2 , dan $Y_1 + Y_2$ merupakan image (bayangan/pemetaan) dari $X_1 + X_2$, menunjukkan bahwa operasi mengenai penjumlahan berlaku dalam Transformasi. Apabila Y_1 merupakan image X_1 maka kemudian berlaku kY_1 merupakan image kX_1, karena berlaku $A(kX_1) = kA\, kX_1$.

Perkalian dari X dengan suatu harga/ scalar juga merupakan perkalian imagedari X dengan scalar yang sama. Ini berarti bahwa perkalian juga berlaku dalam Transformasi.

Hubungan $Y = A X$ dan apabila matrik A merupakan matrik non singgular (memenuhi syarat bahwa $\det(A) \neq 0$), akan dapat dicari X dalam hubungan : $X = A^{-1} Y$, dimana matrik A^{-1} merupakan invers dari matrik A. Setiap titik dari bidang (x_1, x_2) berkoresponden dengan satu titik saja dari bidang (y_1, y_2), dan juga berlaku sebaliknya bahwa setiap titik dari bidang (y_1, y_2) berkoresponden dengan satu titik saja dari bidang (x_1, x_2). Transformasi yang mempunyai sifat seperti ini disebut satu lawan satu (*one to one transformation*).

Definisi : Suatu Transformasi linier T terhadap vektor space (ruang vektor) F^n adalah suatu koresponden yang memetakan setiap vektor x dari F^n menjadi satu vektor T (x) dari vector space F^m dimana m bisa >, =, <, dari n, sedemikian rupa sehingga vektor-vektor X_1 dan X_2 dari F^n dan semua skalar k_1, k_2, mempunyai hubungan sebagai berikut:

$$T(k_1X_1 + k_2X_2) = k_1 T(X_1) + k_2 T(X_2).$$

Jika $k_1 = k_2 = 1$, hubungannya menjadi $T(X_1 + X_2) = T(X_1) + T(X_2)$

Seringkali T disebut operasi dari transformasi yang mentransformasikan (mengubah bentuk) vektor X menjadi vektor Y.

Contoh 1 :

Tunjukkan bahwa Transformasi $y = ax$ merupakan transformasi linier.

Jawab :

$T(x) = ax$

$T(k_1x_1 + k_2x_2) = a(k_1x_1 + k_2x_2) = k_1(ax_1) + k_2(ax_2) = k_1 T(x_1) + k_2 T(x_2)$.

(karena sama maka linier)

Contoh 2 :

Tunjukkan bahwa Transformasi $y = bx^2$ merupakan transformasi non linier.

Jawab :

Untuk menjawab pertanyaan diatas cukup dengan menunjukkan bahwa

$$T(k_1x_1 + k_2x_2) = b(k_1x_1 + k_2x_2)^2$$

$$= b(k_1x_1)^2 + b(k_2x_2)^2 + 2b\ k_1k_2\ x_1x_2$$

$$T(k_1x_1 + k_2x_2) \neq k_1T(x_1) + k_2T(x_2) = bk_1x_1^2 + bk_2x_2^2$$

(karena tidak sama maka transformasi diatas merupakan transformasi non linier)

2. Transformasi Elementer

Jika A merupakan suatu matrik berdemensi m x n, maka yang disebut transformasi elementer adalah :

1. Menukarkan dua baris atau dua kolom yang berdekatan atau tidak berdekatan;
2. Memperkalikan semua elemen dari suatu baris atau suatu kolom dengan bilangan konstan k. Misalkan semua elemen dari baris ke –i dikalikan bilangan konstan k.
3. Penambahan pada elemen-elemen dari suatu baris atau kolom dengan hasil kali semua elemen dari baris atau kolom lain dengan bilangan konstan k.

Contoh 1 :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}1 & \mathbf{a}2 & \mathbf{a}3 \\ \mathbf{b}1 & \mathbf{b}2 & \mathbf{b}3 \\ \mathbf{c}1 & \mathbf{c}2 & \mathbf{c}3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2\mathbf{b}1 & 2\mathbf{b}2 & 2\mathbf{b}3 \\ \mathbf{a}1 & \mathbf{a}2 & \mathbf{a}3 \\ \mathbf{c}1 & \mathbf{c}2 & \mathbf{c}3 \end{pmatrix}$$

matrik diatas terlihat bahwa elemen-elemen baris 1 menjadi elemen-elemen baris ke 2, dan elemen-elemen baris ke 2 dikalikan 2 dan menjadi elemen-elemen baris 1

Contoh 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[b_3 \ - b_2]{b_1+2\ b_2} \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Rank

Dalam mempelajari pengertian dari RANK terlebih dahulu perlu dimengerti pengertian dari Minor Matrik. Minor Matrik telah dibawas di bagian depan. Minor Matrik merupakan bagian dari matrik yang muncul dari pengambilan salah satu baris atau salah satu kolom. Apabila suatu matrik ordo n x n, maka salah satu minor matriknya berordo (n-1) x (n-1). Yang disebut dengan minor determinan adalah determinan dari minor matrik tersebut.

Definisi : Jika Matrik A apabila terdapat sedikit-dikitnya satu minor determinan yang tidak lenyap (determinannya ≠ 0) dan ternyata terdiri dari r baris, akan tetapi untuk minor determinan yang pasti lenyap apabila minor matriknya terdiri dari (r+1) baris, matrik A dikatakan mempunyai RANK sebesar r, dan diberi simbul rank (A) = r(A) = r.

Pengertian rank ini mempunyai peranan penting didalam pemecahan persamaan-persamaan linier, sebab dengan mengetahui besarnya rank dari suatu matrik dapat diketahui apakah suatu persamaan linier mempunyai solusi.

Definisi : Suatu matrik kwadrat A berordo n x n, disebut ***non singular*** apabila : rank (A) = r(A) = r = n dan ***singular*** apabila r < n.

I. INVERS SUATU MATRIK

Invers suatu matrik adalah kebalikan dari matrik tersebut. Jika terdapat matrik A, yang dimaksut dengan matrik inversnya adalah A^{-1}. Suatu invers mempunyai sifat apabila dikalikan dengan matrik aslinya maka hasilnya akan sama dengan 1. Berlaku hubungan bahwa $A.A^{-1} = I$

Definisi : Misalkan Matri A merupakan matrik bujursangkar berordo n, dan I_n merupakan suatu matrik identitas, apabila ada matrik bujursangkar A^{-1} akan sedemikian rupa sehingga berlaku hubungan sebagai berikut : $A.A^{-1} = A^{-1}A = I$ dan A^{-1} disebut invers dari matrik A.

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix}, \text{ Cari } A^{-1} =$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det (A)}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\text{Misalkan } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ det (A) } = 4 - 6 = -2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

dibuktikan :

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

1. Mencari Invers Suatu Matrik menggunakan Metode Substitusi

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; tentukan A^{-1} menggunakan substitusi

berlaku ketentuan $A.A^{-1} = I$, misalkan $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$A.A^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A.A^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hasil perkalian antara matrik A dan matrik A^{-1} seperti berikut :

$a + 2d + g = 1$ .... (1) $b + 2e + h = 0$ … (4) $c + 2f + i = 0$ …. (7)

$a - d + 3g = 0$ .... (2) $b - e + 3h = 1$ … (5) $c - f + 3i = 0$ …. (8)

$a + d + 2g = 0$ … (3) $b + e + 2h = 0$ … (6) $c + f + 2i = 1$ …. (9)

terdapat 9 persamaan dengan 9 variabel, sehingga masing-masing variable akan diperoleh solusinya (harganya

(1) $a + 2d + g = 1$ (1) $a + 2d + g = 1$

(2) $a - d + 3g = 0$ (3) $a + d + 2g = 0$

------------------ - ------------------- -

(1) – (2) → $0 + 3d – 2g = 1$ (10) (1) – (3) → $0 + d – g = 1$ (11)

(10) $3d - 2g = 1$

2 x (11) $2d – 2g = 2$ → (10) - (2x(11)) → $d = -1$ (12)

(12) → (11)   -1 – g = 1 →   g = -2   (13)

(12) dan (13) → (1)   a +2(-1) + (-2) = a – 4 = 1 → a = 5

Jadi harga a = 5, d = -1, dan g=-2

(4)	b + 2e + h = 0	(4)	b + 2e + h = 0
(5)	b- e + 3h = 1	(6)	b + e + 2h = 0
	------------------ -		------------------- -

(4) – (5) → 0 + 3e – 2h= -1   (14)   (4) – (6) → 0 + e – h = 0 → e = h   (15)

(15) →(10)   3h – 2h = -1 → h = -1   (16)   dan e=h= -1   (17)

(16) dan (17) → (4)   b + 2.(-1) + (-1) = 0 →   b = 3

Jadi harga b = 3, e = -1, dan h=-1

(7)	c + 2f + i = 0	(7)	c + 2f + i = 0
(8)	c - f + 3i = 0	(9)	c + f + 2i = 1
	------------------ -		------------------- -

(7) – (8) → 0 + 3f – 2i = -0   (7) – (9) → 0 + f – i = -1   (19)

f = (2/3)i   (18)

(18) →(19) → (2/3)i - i = -1 → - (1/3)i = -1 → **i = 3**   (20)

(20) →(18) → **f = (2/3).3 = 2**   (21)

(20) dan (21) → (7)   c + 2.(2) + (3) = 0 →   **c = -7**

Jadi harga c = -7, f = 2, dan i = 3

Matrik Invers yang dicari :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

dan berlaku hubungan :

$$A.A^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Mencari Invers Suatu Matrik menggunakan Adjoint

Terdapat suatu matrik bujursangkar berordo n, setiap elemen dari matrik mempunyai kofaktor, yaitu elemen a_{ij} mempunyai kofaktor K_{ij}. Apabila semua kofaktor tersebut dihitung untuk semua elemen dari matrik A, dan akan dibentuk matrik K dengan kofaktor dari semua elemen matrik A, sebagai elemennya, maka :

$$K = (Kij) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ . & . & \dots & \\ K_{m1} & K_{m2} & \dots & K_{mn} \end{pmatrix} \text{; disebut sebagai matrik Kofaktor}$$

Definisi : Adjoint dari Matrik A ialah suatu matrik yang elemen-elemennya terdiri dari transpose dari semua kofaktor dari elemen-elemen matrik A, dengan syarat K= Kij, dimana Kij adalah kofaktor dari elemen aij, maka adjoint dari matrik A yaitu: adj (A) = $K^{|}$ = Kji. Jadi adj (A) ialah transpose dari matrik kofaktor K.

$$\text{Adj }(A) = K^{|} = (Kji) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{21} & \dots & K_{m1} \\ K_{12} & K_{22} & \dots & K_{m2} \\ . & . & \dots & . \\ K_{1n} & K_{2n} & \dots & K_{mn} \end{pmatrix} \text{; } A^{-1} = \frac{K^{|}}{\det(A)}$$

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$; tentukan A^{-1} menggunakan matrik Adjoint

Jawab :

1. Cari harga determinannya
2. Cari Harga masing-masing matrik kofaktornya (Kij)
3. Transfose matrik kofaktornya, mencari matrik adjoint (adj(A) =(Kji))

Det (A) = -2 + 6 + 1 + 1 -3 -4 = -9 + 8 = -1

$K_{11} = + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$; $K_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-1) = 1$

$K_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$; $K_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(3) = -3$

$K_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$; $K_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1$

$K_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7$; $K_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(2) = -2$

$K_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$

Matrik Kofaktornya adalah : $K = (K_{ij}) = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; $K^{|} = K_{ij} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 7 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = -1 \begin{pmatrix} -5 & -3 & 7 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Mencari Invers Suatu Matrik menggunakan Metode Kounter

Metode ini berdasarkan atas teori transformasi elementer yang telah dibahas didepan. Transformasinya menggunakan baris dari matrik yang inversnya akan dicari.

Dalil : Jika suatu matrik bujursangkar yang non singular, dimana det (A) $\neq 0$, dan berordo n dan I_n merupakan matrik satuan berordo n. Kemudian I diletakkan pada sebelah kanan matrik A, maka akan diperoleh suatu matrik M yang disebut ***Augmented*** matrik sebagai berikut : M = A | I_n . jika baris-baris matrik A maupun baris-baris matrik I_n terhadap baris-baris ***Augmented*** M dilakukan transformasi elementer sedemikian rupa sehingga matrik A berubah menjadi I_n maka akan diperoleh invers matrik A atau A^{-1} yang berada ditempat dimana I_n berasal, dengan kata lain bahwa A berubah menjadi I_n dan I_n berubah menjadi A^{-1}.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$; tentukan A^{-1} menggunakan metode Kounter

Jawab :

$$M = A \mid I_3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{r} \\ b_2 - b_1 \\ b_3 - b_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} b_1 + 2b_3 \\ b_2 - 2b_3 \\ \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ b_3 - b_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} b_1 - 3b_3 \\ b_2 \times (-1) \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right)$$

jadi harga $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Mencari Invers Suatu Matrik menggunakan Matrik Partisi

Metode mencari invers suatu matrik berdasarkan pembagian matrik mnjadi bagian-bagian matrik yang lebih kecil atau sub matriknya.

Misalkan terdapat matrik bujursangkar ber ordo n, matrik tersebut adalah matrik:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} \end{pmatrix}$$

Pada matrik berlaku hokum, $A.A^{-1} = I$, sehingga

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

$PE + QG = I$ ……….. (1)

$PF + QH = 0$ ………… (2)

$RE + SG = 0$ ………… (3)

$RF + SH = I$ ……….. (4)

(3) ……. $RE + SG = 0 \rightarrow SG = -RE, \rightarrow G = -S^{-1}RE$ ………………… (5)

(5) $\rightarrow$ (1) .. $PE + QG = I \rightarrow PE + Q(G = -S^{-1}RE) = I$

$PE - QS^{-1}RE = I \rightarrow (P - QS^{-1}R)E = I \rightarrow E = (P - QS^{-1}R)^{-1}$ …… (6)

(4) $\rightarrow$ $RF + SH = I \rightarrow SH = I - RF \rightarrow H = S^{-1}(I - RF)$

$H = S^{-1} - S^{-1}RF$

(2) $\rightarrow$ $PF + QH = 0 \rightarrow PF + Q(S^{-1} - S^{-1}RF) = 0$

$PF + QS^{-1} - QS^{-1}RF) = 0 \rightarrow F(P - QS^{-1}R) = -QS^{-1}$ …………….(7)

(6) $\rightarrow$(7) $FE^{-1} = -QS^{-1} \rightarrow F = -EQS^{-1}$ ………………………………… ..(8)

diperoleh hasil harga-harga matrik invers dengan elemen-elemen :

$E = (P - QS^{-1}R)^{-1}$

$F = -EQS^{-1}$

$G = -S^{-1}RE$

$H = S^{-1} - S^{-1}RF$

Contoh :

Carilah invers dari matrik A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dengan menggunakan partisi matrik.

Jawab :

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{pmatrix}$$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $R = (\ 1 \quad 1\ )$ $S = (\ 2\ )$ $S^{-1} = (\ 1/2\ )$

E = (P - Q S⁻¹R)⁻¹

$$\boldsymbol{E = (P - Q\,S^{-1}R)^{-1}}$$

$$Q\,S^{-1}R = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (\ 1/2\ )(\ 1 \quad 1\ ) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (\ ½ \quad ½\ ) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$P - Q\,S^{-1}R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ -1/2 & -5/2 \end{pmatrix}$$

$$E = (P - Q\,S^{-1}R)^{-1} = -2 \begin{pmatrix} -5/2 & -3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{F = -E\,Q\,S^{-1}}$$

$$\mathbf{F = -E\,Q\,S^{-1}} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{F} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{G = -S^{-1}\,RE}$$

$$\mathbf{G = -S^{-1}\,RE} = -(1/2)(\ 1 \quad 1\ ) \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = (\ -1/2 \quad -1/2\ ) \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = (\ -2 \quad -1)$$

G = (-2 -1)

$\boldsymbol{H = S^{-1} - S^{-1}RF}$

$$H = S^{-1} - S^{-1}RF = (1/2) - (1/2)(1 \;\; 1)\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix} = (1/2) - (1/2 \;\; 1/2)\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= (1/2) + (5/2) = (3) \Rightarrow \quad \mathbf{H} = (3)$$

jadi harga $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{pmatrix}$

RANGKUMAN

1. Matrik ialah kumpulan angka-angka atau elemen-elemen yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk empat persegi panjang, dimana panjang dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom dan banyaknya baris.
2. Matrik dituliskan dalam tanda kurung atau kurung besar. Matrik ditulis dalam bentuk huruf besar.
3. Matrik tidak mempunyai harga, matrik hanyalah sekumpulan data yang dituliskan dengan syarat tertentu.
4. Pada saat jumlah baris sama dengan jumlah kolom, matrik tersebut disebut matrik bujur sangkar (square matrik).
5. Suatu matrik bujur sangkar dengan diagonal utama elemen elemennya sama dengan 1 (satu) matrik tersebut disebut matrik satuan.
6. Operasi suatu matrik dari baris menjadi kolom, dan dari kolom menjadi baris, matrik baru tersebut disebut matrik transpose.
7. Penjumlahan dan pengurangan matrik A dengan matrik B dapat dilakukan apabila jumlah baris matrik A sama dengan matrik B, dan jumlah kolom matrik A juga sama dengan matrik B.
8. Suatu Matrik ordo 2x2 mempunyai determinan menggunakan formula elemen baris pertama kolom pertama (a_{11}) dikalikan elemen baris ke dua kolom kedua (a_{22}) dikurangi dengan elemen baris pertama kolom ke dua (a_{12}) yang dikalikan dengan elemen baris kedua dikalikan dengan kolom pertama (a_{21}).
9. Suatu matrik ordo nxn dapat dicari determinannya menggunakan matrik kofaktor.
10. Invers suatu matrik A apabila memenuhi persyaratan $A.A^{-1}= I$, dimana A^{-1} adalam matrik invers dari matrik A, I adalah matrik satuan.
11. Suatu matrik A mempunyai invers apabila determinan matrik A ada ($A \neq 0$).

12. Mencari invers matrik A menggunakan 4 metode yaitu a. menggunakan matrik Adjoint, b. menggunakan metode substitusi, metode Kounter, dan d, Matrik Partisi.

LATIHAN

1. Jika Terdapat Suatu Matrik :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Tentukan Harga Matrik baru Jika :

a. A. B	b. B. A
c. 3 (A – D)	d. (E + B)
e. 2 B – 3 E	f. B.A.C
g. $(B.A)^2$	h. $(A . B)^2$
i. A.B + C	j. B.A – C
k. C^2 – BA	l. $((BA)^2 + C^2)$

2. JIka Matriks A, B, C, D, E seperti pada No. 1. tentukan harga :

a. det (C)	b. det (A.B)	c. det (D.E)	d. det (B.A)
e. det (E.D)	f. det $((B.A)^2)$	g. det (C^2)	h. det (2(B.A))

3. Tentukan Harga determinan dari matrik A. matrik B, dan Matrik C, matrik D, dan Matrik E dibawah ini :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & -3 \\ 3 & 6 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Tentukan harga determinan dari matrik A. matrik B, dan matrik C, dan matrik D, dan matrik E, dengan menggunakan matrik kofaktor :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Tentukan harga x, y, dan z dengan menggunakan harga determinan menggunakan persamaan dibawah ini :

a. $2x + y + z = 4$

$x + 2y - z = 5$

$-x + 4y - z = 3$

b. $x + y + z = 6$

$x + y - z = 4$

$2x - 2y - z = 3$

c. $x + y + z = 2$

$x + 2y - z = 4$

$-x + 4y + 3z = 0$

d. $x + y + 2z = 2$

$x - y + 2z = -2$

$2x + 2y - z = 5$

6. tentukan harga matrik invers dari matrik dibawah ini :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

7. Tentukan harga matrik invers dari matrik A, B, C, D, dan E dibawah ini dengan menggunakan metode Substitusi :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

8. Tentukan harga matrik invers dari matrik A, B, C, D, dan E seperti pada soal no. 7 diatas dengan menggunakan metode matrik adjoint :

9. Tentukan harga matrik invers dari matrik A, B, C, D, dan E seperti pada soal no. 7 diatas dengan menggunakan metode kounter :

10. Tentukan harga matrik invers dari matrik A, B, C, D, dan E seperti pada soal no. 7 diatas dengan menggunakan metode matrik partisi :

TEST FORMATIF

1. Jika terdapat Matrik :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Berapa harga A + B

a. $A+B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$ b. $A+B=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

c. $A+B=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ d. $A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

2. Matrik A dan B seperti soal no 1, berapakah harga matrik A-B

a. A-B= $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$ b. A- B = $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

c. A-B= $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ d. A-B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

3. Matrik A dan B seperti soal no 1, berapakah harga matrik AxB :

a. AxB= $\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ -15 & 9 \end{pmatrix}$ **b**. AxB = $\begin{pmatrix} 11 & -11 \\ -15 & 9 \end{pmatrix}$

c. AxB= $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 15 & -21 \end{pmatrix}$ d. AxB = $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -15 & 21 \end{pmatrix}$

4. Matrik A dan B seperti soal no 1, berapakah harga matrik BxA :

a. BxA= $\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ -15 & 9 \end{pmatrix}$ b. BxA = $\begin{pmatrix} 11 & -11 \\ -15 & 9 \end{pmatrix}$

c. BxA= $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 15 & -21 \end{pmatrix}$ **d**. BxA = $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -15 & 21 \end{pmatrix}$

5. Suatu matrik A berordo 3x4 dikalikan dengan matrik B dengan ordo 4x4, hasilnya adalah matrik C dengan ordo

a. **3x4** b. 3x3 c. 4x4 d. Jawaban tidak ada

6. Berapa harga determinan dari matrik A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a. 1 **b. 2** c.3 d. -2

7. Soal seperti no 5, berapa harga determinan matrik B

a. 1 b. 2 c.3 d. -2

8. Soal seperti no 5, berapakah invers matrik A

a. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ b. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

c. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2.5 \\ -1 & 1.5 \end{pmatrix}$ d $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1.5 & 1 \\ 2.5 & 2 \end{pmatrix}$

9. Soal seperti no 5, berapakah invers matrik B

a. $B^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 7 & 10 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ b. $B^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 7 & -10 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

c. $B^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 7 & 10 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **d.** Tidak ada jawaban yang benar

10. Soal seperti no 5, berapakah invers matrik C

a. $B^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 7 & 10 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ b. $B^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 7 & -10 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

c. $B^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 7 & 10 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ d. Tidak ada jawaban yang benar

Cocokkan jawaban saudara dengan kunci jawaban test formatif 1 yang terdapat pada bagian akhir Modul ini. Hitunglah jawaban saudara yang benar. Kemuadian gunakan rumus dibawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Saudara terhadap materi Modul ini.

Rumus :

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban saudara yang benar}}{10} \times 100\ \%$$

Arti tingkat penguasaan yang saudara peroleh adalah :

80 – 100 % = Baik Sekali

70 – 79 % = Baik

60 – 69 % = Cukup

< 60 % = Kurang

Bila saudara memperoleh tingkat penguasaan 70 % atau lebih saudara dapat melanjutkan ke Modul berikutnya. Sedangkan jika tingkat penguasaan Saudara dibawah 70% saudara wajib mengulangi Modul ini, terutama pada bagian yang belum saudara kuasai.

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, Frank. 1981. *Teory and Problem of Calkulus*. : McGraw-Hill, Singapore.

Anton.1992. *Aljabar Linier Elementer.* Erlangga, Jakarta.

Bartle, Robert Gardner. 1927. *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons, Inc. USA.

Budi, Wono Setyo. 1995. *Aljabar Linier*. Gramedia. Jakarta.

Hendrawan, Andi. 2001. *Hitung Deferensial*. Debut Press. Yogyakarta.

Howard, Hutahaean. 1983. *Kalkulus Deferensial dan Integral*. Gramedia. Jakarta.

Keedy & Bittinger. 1986. Algebra and Trigonometry. Addison Wesley Publising Company. California

Leitold, Louis. 1987. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitis*. Bina Aksara. Jakarta.

Nasution, Andi Hakim. 1971. *Landasan Matematika*. Bhatara. Jakarta

Rawuh, *Matematika Pendahuluan*, Penerbit ITB. Bandung

Seputro, Theresia, 1989. *Pengantar Dasar Matematika*. Depdikbud. Jakarta.

Soepranto, J. 1979. *Pengantar Matrik.* Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi UI. Jakarta.

Wongso Sutjitro, Sutomo. 1974. *Ilmu Ukur Tanah*. Swada. Bandung.

MODUL IV

MATRIK DAN VEKTOR

KEGIATAN BELAJAR : VEKTOR

A. PENDAHULUAN

Tujuan dari pembelajaran Vektor pada modul IV Matrik dan Vektor adalah setelah mempelajari dapat menguasai prinsip prinsip dari vektor sebagai suatu besaran yang mempunyai besar dan arah, berkaitan erat dengan matrik, dasar dari transformasi, dan dapat mengaplikasikan dengan perhitungan perhitungan pengukuran, dan perhitungan lainnya.

Kegiatan belajar dengan materi vektor ini akan dapat dikuasai dengan baik apabila mahasiswa menguasai aljabar, kalkulus, dan trigonometri. Pada aljabar ditekankan pada persamaan dan fungsi aljabar baik berupa fungsi linier, fungsi kwadrat, dan fungsi pangkat n. Penguasaan kalkulus khususnya pada deferensial, atau derivatif. Sedangkan trigonometri meliputi pengetahuan tentang sudut, dan persamaan dan fungsi trigonometri.

Vektor biasanya digunakan untuk membantu memecahkan masalah-masalah dalam fisika. Untuk menjelaskan tentang kecepataan, percepatan, gaya, momentum, impuls, tekanan, induksi magnet, dan sebagainya. Misalkan untuk memecahkan persoalan kecepatan, waktu, serta jarak yang ditempuh seseorang dalam menyeberang sungai dimana terdapat kecepatan arus, dan lebar sungai yang diketahui. Pemecahan tersebut menggunakan pengetahuan tentang vektor yang mengandung unsur besaran yang berupa panjang dan arah yang ditentukan oleh sudutnya.

Vektor mempunyai hubungan yang sangat erat dengan Matrik, Matrik memerlukan pengetahuan tentang vektor, begitupula Vektor memerlukan pengetahuan tentang Matrik. Vektor dalam pengetahuan yang berhubungan dengan pengukuran bidang diperlukan dalam kaitannya dengan kemiringan lereng, arah pengukuran, serta pengetahuan alat ukur.

B. PENGERTIAN VEKTOR

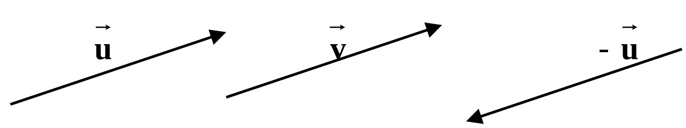
Vektor merupakan suatu ruas garis yang berarah yang panjang dan arahnya tertentu. Panjang ruas garis disebut **panjang vektor,** arah ruas garis disebut **arah vektor** dan setiap ruas garis berarah tadi dinamakan wakil vektor.

Untuk menuliskan vektor dipakai huruf kecil latin cetak tebal atau huruf kecil yang diberi garis atas atau garis bawah, atau dengan menuliskan titik pangkal dan titik ujung dari ruas garis berarah tadi dengan dua huruf berurutan dan ujungnya diberi panah.

Besaran vektor adalah besaran yang mempunyai panjang dan arah. Contoh dari besaran vektor ini misalnya kecepatan, percepatan, gaya, momentum, medan magnet, medan listrik, dan sebagainya.

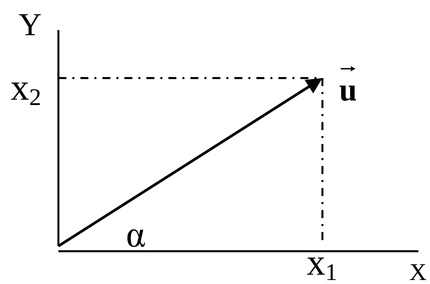
Disamping besaran vektor ada besaran lain yang didefinisikan besaran skalar. Besaran skalar adalah besaran yang hanya mempunyai besar saja, tidak mempunyai arah. Contoh dari besaran skalar adalah waktu, suhu, panjang, luas, volume, massa, dan sebagainya.

Vektor $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ disebut sama apabila besar dan arah vektor tersebut sama dan vektor $-\vec{\mathbf{u}}$ jika besarnya sama tetapi arahnya berlawanan.



Gambar 1 Vektor yang besarnya sama

Vektor dapat diilustrasikan pada demensi 2 atau demensi 3, yang masing-masing berupa bidang datar yang mempunyai luas dan ruangan yang mempunyai isi atau volume. Vektor sebenarnya berupa titik pada ruang atau bidang atau yang lainnya.

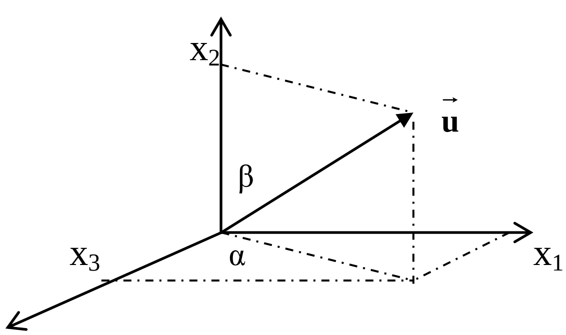


Gambar 2 Definisi Vektor

Bila suatu vektor V yang berasal dari titik O, untuk menunjukkan titik akhir (disebut juga terminal point) dri vektor V itu diperlukan dua komponen dari vektor itu, yaitu komponen x_1 dan x_2 sedangkan untuk mengetahui arah diperlukan sudut dari vektor V tersebut.

Panjang suatu vektor, didefinisikan sebagai panjang suatu garis, ditulis | $\vec{\mathbf{u}}$ | disebut juga suatu besaran skalar. $|\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}$

Arah dari vektor V ditentukan dengan rumus $\operatorname{tg} \alpha = x_1 / x_2$



Gambar 3 Vektor pada demensi 3 :

untuk x_1 identik dengan sumbu x, x_2 identik dengan sumbu y, dan x_3 identik dengan sumbu z. Dibuat dalam bentuk x_n supaya demensinya dapat sampai ke n.

Panjang suatu vektor, didefinisikan sebagai panjang suatu garis, ditulis | $\vec{\mathbf{u}}$ | disebut juga suatu besaran skalar.

$$|\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$$

Arah dari vektor V ditentukan oleh dua sudut yaitu α dan β dengan hubungan sebagai berikut :

$$\text{tg } \alpha = x_1 / x_2 \quad \text{dan } \cos \beta = x_2 / \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$$

Untuk vektor dengan demensi lebih dari 3 tidak dapat lukiskan secara geometris, tetapi hanya dapat dibayangkan saja. Untuk lebih menyederhanakan perlu diberikan batasan-batasan untuk vektor demensi n, misalnya :

Definisi : Vektor demensi n adalah suatu susunan yang teratur dari elemen-elemen berupa angka-angka sebanyak n buah, yang disusun baik menurut baris, dari kiri kekanan (disebut **vektor baris** atau ***row vector***) dan menurut kolom yaitu dari atas kebawah (disebut **vektor kolom** atau ***column vector***)

Terdapat suatu vektor baik berupa vektor baris maupun vektor kolom yang semua komponennya sama dengan 0 kecuali satu komponen yang mempunyai nilai 1. Vektor tersebut dinamakan vektor satuan.

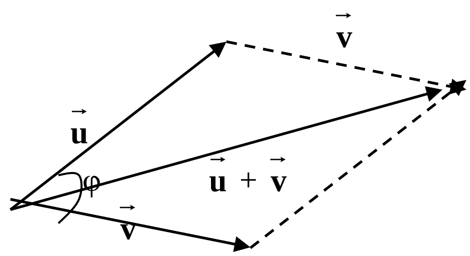
Suatu vektor yang panjangnya satu satuan dinyatakan dengan $\vec{\mathbf{e}}$, dan berlaku hubungan $\vec{\mathbf{e}} = \dfrac{\vec{\mathbf{u}}}{|\vec{\mathbf{u}}|}$, vektor satuan $\vec{\mathbf{e}}$ dapat digantikan sebagai vektor satuan i untuk sumbu x, j untuk sumbu y, dan k untuk sumbu z, untuk vektor di ruang. Sedangkan untuk bidang vektor satuannya i dan j saja.

Besar vektor satuan,

C. OPERASI PADA VEKTOR

1. Operasi Penjumlahan

Penjumlahan dua buah vektor dapat digambarkan melalui aturan jajaran genjang, atau menggunakan bentuk pasangan dua buah bilangan.



$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \qquad \vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$$

Gambar 4 Penjumlahan Vektor

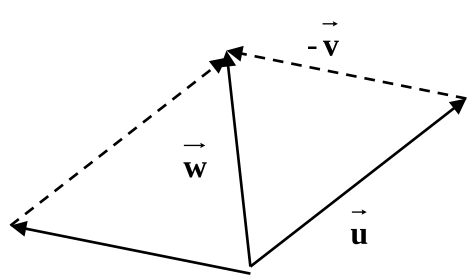
Misalnya terdapat dua buah vektor $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$. jumlah kedua vektor tersebut adalah $\vec{\mathbf{w}}$, dituliskan $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{w}}$

Panjang vektor $\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} = |\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{\ }((a+c)^2 + (b+d)^2)$

$(|\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}|)^2 = (|\vec{\mathbf{u}}|^2 + (|\vec{\mathbf{v}}|^2 + 2\,|\vec{\mathbf{u}}|\,|\vec{\mathbf{v}}| \cos \varphi\ )$

2. Operasi Pengurangan

Pengurangan dua buah vektor dapat digambarkan melalui aturan jajaran genjang, atau menggunakan bentuk pasangan dua buah bilangan.



Gambar 5 Operasi Pengurangan Vektor

$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{w}$

Panjang vektor $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{((a-c)^2 + (b-d)^2)}$

$(|\vec{u} - \vec{v}|)^2 = (|\vec{u}|^2 + (|\vec{v}|^2 - 2\,|\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos \varphi)$

3. Arah suatu vektor hasil penjumlahan dan pengurangan

β = arah vektor hasil penjumlahan

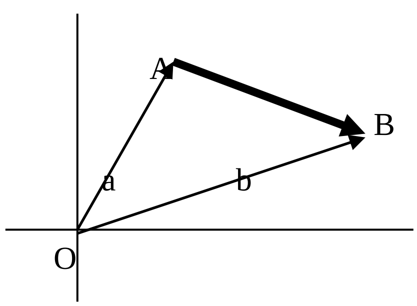
α = sudut antara $\vec{u}$ dengan $\vec{v}$

berlaku hubungan :

$$\frac{||\vec{u} + \vec{v}|}{\sin \alpha} = \frac{|\vec{u}|}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{|\vec{v}|}{\sin(\beta)}$$

$$\frac{||\vec{u} - \vec{v}|}{\sin \alpha} = \frac{|\vec{u}|}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{|\vec{v}|}{\sin(\beta)}$$

4. Vektor Posisi



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= b - a$

jika A (a_1, a_2) , dan A (b_1, b_2), maka

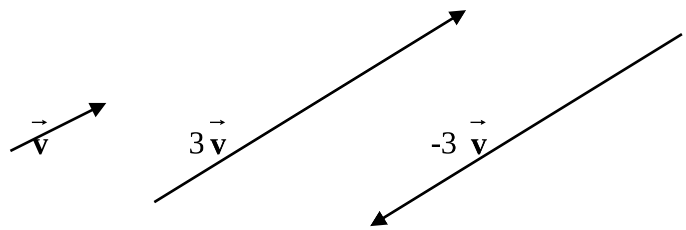
$$\overrightarrow{AB} = b - a = \begin{pmatrix} \mathbf{b}1 \\ \mathbf{b}2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{a}1 \\ \mathbf{a}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}1 - \mathbf{a}1 \\ \mathbf{b}2 - \mathbf{a}2 \end{pmatrix}$$

OA = a dan OB = b merupakan vektor-vektor

Gambar 6 Vekor Posisi

5. Perkalian vektor dengan skalar dan perkalian vektor dengan vektor

Perkalian vektor dengan skalar digambarkan sebagai kelipatan panjang vektor itu sendiri. Apabila dikalikan dengan bilangan positif maka arahnya tetap, dan panjangnya berlipat. Jika dikalikan dengan bilangan negative mama arah vektor tersebut akan berbalik.



Gambar 7 Perkalian Vektor dengan Skalar

Perkalian vektor dengan vektor, didefinisikan sebagai perkalian panjang masing-masing vektor dikalikan cosinus sudut antara $\vec{\mathbf{u}}$ dengan $\vec{\mathbf{v}}$, dituliskan : $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = |\vec{\mathbf{u}}| \cdot |\vec{\mathbf{v}}| \cos \varphi$

$$\text{Cos } \varphi = \frac{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{u}}| \cdot |\vec{\mathbf{v}}|}, \text{ dimana}$$

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = (a1.a2) \begin{pmatrix} \mathbf{b}1 \\ \mathbf{b}2 \end{pmatrix} = a_{1.}\, b_1 + a_{2.}\, b_2$$

Contoh 1 :

Jika $\vec{\mathbf{u}}$ = (3,3) dan $\vec{\mathbf{v}}$ = (2, -1)

Tentukan harga perkalian $\vec{\mathbf{u}}$ dan $\vec{\mathbf{v}}$

Jawab :

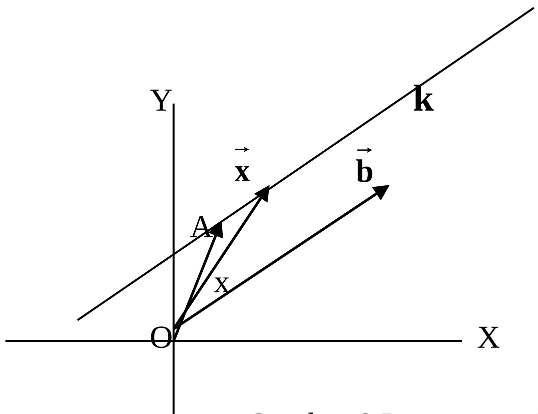
$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 6 - 3 = 3$

$|\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{(3^2 + 3^2)} = 3\sqrt{2}$ dan $\vec{\mathbf{v}} = \sqrt{(2^2 + (-1)^2)} = \sqrt{5}$, sehingga $|\vec{\mathbf{u}}| \cdot |\vec{\mathbf{v}}| = 3\sqrt{10}$

$$\text{Cos } \varphi = \frac{3}{3\sqrt{10}} = \frac{1}{10}\sqrt{10}$$

D. PENGGUNAAN ALJABAR VEKTOR PADA ILMU UKUR ANALISA

1. Persamaan Garis



Gambar 8 Persamaan Garis melalui satu titik

a. Persamaan garis melalui sebuah titik dan sejajar dengan sebuah vektor.

Untuk mencari solusi persamaan diatas menggunakan cara dengan menurunkan garis di bidang dan untuk persamaan garis di ruang, dilakukan serupa.

Ditentukan sebuah titik A dan vektor $\vec{\mathbf{b}}$, maka persamaan vektor garis yang melalui A dan sejajar $\vec{\mathbf{b}}$ dapat diturunkan sebagai berikut:

Sebut $\overrightarrow{\mathbf{OA}} = \vec{\mathbf{a}}$, maka setiap vektor $\vec{\mathbf{x}}$ yang ujungnya di **k** dapat ditulis sebagai :

$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{b}}$, dan sebaliknya, setiap vektor di **k** sebagai ujung vektor $\vec{\mathbf{x}}$ akan memenuhi persamaan $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{b}}$. Persamaan $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{b}}$ dinamai ***persamaan vektor*** daripada garis **k**. t disebut parameter, dimana $-\sim < t < \sim$, vektor $\vec{\mathbf{b}}$ dinamai vektor arah dari garis tersebut. Jika ditulis $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$, $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2)$, dan $\vec{\mathbf{b}} = (b_1, b_2)$, maka persamaan

$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{b}}$ artinya persamaan lain adalah persamaan :

$x_1 = a_1 + t\, b_1$ dan $x_1 = a_1 + t\, b_1$.

Persamaan diatas dinamakan ***persamaan parameter*** daripada **k**, dari sepasang persamaan diatas harga t dapat dieliminasi melalui substitusi, sehingga diperoelh persamaan :

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2} = \mathbf{t},$$

dinamakan ***persamaan koordinat*** atau persamaan kartesius daripada **k**, dan selanjutnya dapat ditulis dalam bentuk :

$(x_1 - a_1) = \lambda\ (x_2 - a_2)$, dimana $\lambda = (b_1 / b_2)$

λ = dinamakan koefisien arah daripada garis **k**

Contoh 2:

Tentukan persamaan garis **k** yang melalui A (2,7,-1) dan sejajar dengan $\vec{\mathbf{b}} = (1,1,1)$.

Jawab :

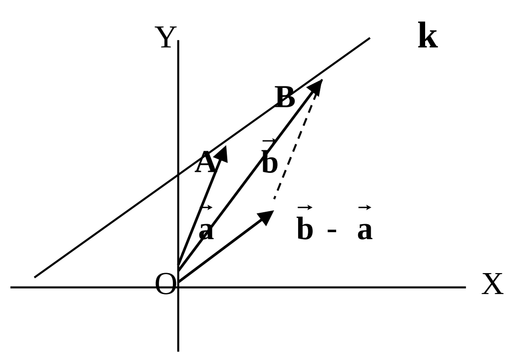
Persamaan vektor garis **k** : $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{b}}$, dimana A (2,7,-1) dan $\vec{\mathbf{b}} = (1,1,1)$

Persamaan parameter **k**: $x_1 = 2 + t$; $x_2 = 7 + t$; $x_3 = -1 + t$

Persamaan kartesius **k**: $t = (x_1 - 2)/1 = (x_2 - 7)/1 = (x_3 + 1)/1$

atau : $x_1 - 2 = x_2 - 7 = x_3 + 1$

b. Persamaan garis melalui 2 titik A dan B.



Gambar 9 Persamaan Garis melalui 2 titik

Garis yang melalui A dan B, tak lain adalah suatu garis melalui A dan sejajar dengan vektor $(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}})$,sehingga persamaan vektor **k** dapat ditulis sebagai $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} + t(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}})$

Atau dengan cara lain ekuivalen $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} + t(\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}) = \vec{\mathbf{b}} + t(\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} + t(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}})$

Contoh :

Tentukan persamaan garis yang melalui titik A (1,2,3) dan B(4,5,6)

Jawab :

Persamaan Vektor : $\vec{\mathbf{x}} = (1,2,3) + t\,(3,3,3)$

Persamaan parameter : $x = 1 + 3t$; $y = 2 + 3t$; $z = 3 + 3t$

2. Titik Potong Dua Garis

Terdapat kemungkinan kedudukan dua garis diruang adalah bersilang, berpotongan, sejajar atau berimpit.

Misalkan terdapat persamaan garis m dan n sebagai berikut :

$$m : \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} + t\,\vec{\mathbf{b}}$$

$$n : \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{c}} + t\,\vec{\mathbf{d}}$$

jika m dan n berpotongan di $\vec{\mathbf{p}}$ maka akan terdapat t_1 dan t_2 dan akan berlaku

$\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{a}} + t_1\vec{\mathbf{b}}$ dan $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{c}} + t_2\vec{\mathbf{d}}$, atau dapat ditulis $\vec{\mathbf{a}} + t_1\vec{\mathbf{b}}$ dan $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{c}} + t_2\vec{\mathbf{d}}$,

jika ditulis dalam komponennya :

$a_1 + t_1b_1 = c_1 + t_2d_1$;

$a_2 + t_1b_2 = c_2 + t_2d_2$

$a_3 + t_1b_3 = c_3 + t_2d_3$ (**)

dengan perkataan lain, jika sistem persamaan (**) mempunyai satu jawab, maka m dan n *berpotongan;* jika mempunyai banyak jawab, maka m dan n *berimpit;* dan jika tidak mempunyai jawab, maka m dan n s*ejajar*; atau m bersilangan dengan n. Karena untuk sejajar atau berimpit berlaku $\vec{\mathbf{b}} \parallel \vec{\mathbf{d}}$ maka dapat dikatakan , bahwa :

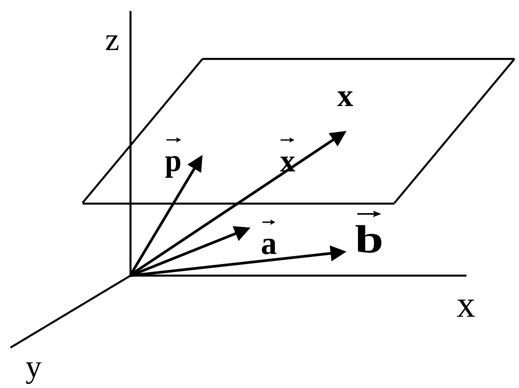
1. jika $\vec{\mathbf{b}}$ // $\vec{\mathbf{d}}$ dan (**) dapat dipecahkan, berarti m dan n berimpit;

2. jika $\vec{\mathbf{b}}$ // $\vec{\mathbf{d}}$ dan (**) tidak dapat dipecahkan, berarti m dan n sejajar;

3. jika $\vec{\mathbf{b}}$ // $\vec{\mathbf{d}}$ dan (**) dapat dipecahkan, berarti m memotong n;

4. jika $\vec{\mathbf{b}}$ // $\vec{\mathbf{d}}$ dan (**) tidak dapat dipecahkan, berarti m dan n bersilangan;

3. Persamaan Vektor di Bidang R_3



Gambar 10 Pers Vektor melaui bidang R_3

Menurunkan persamaan vektor dari suatu bidang d di R_3 pada dasarnya serupa dengan proses menurunkan persamaan garis pada pembicaraan diatas.

Ditentukan suatu titik di P pada dua vektor $\vec{\mathbf{a}}$ dan $\vec{\mathbf{b}}$ dan kedua vektor tersebut tidak berimpit. Pertama tama perlu dibuat persamaan bidang v melalui P dan sejajar dengan bidang kedua vektor $\vec{\mathbf{a}}$ dan $\vec{\mathbf{b}}$. Bidang ini tidak lain adalah bidang yang sejajar dengan bidang w yang juga dibentuk oleh kedua vektor $\vec{\mathbf{a}}$ dan $\vec{\mathbf{b}}$, dengan persamaan :

w : $\vec{\mathbf{x}} = s\,\vec{\mathbf{a}} + t\,\vec{\mathbf{b}}$. Titik x pada bidang v dipandang sebagai titik pada ujung vektor $\vec{\mathbf{x}}$, akan diperoleh persamaan vektor V sebagai berikut : $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{p}} + s\,\vec{\mathbf{a}} + t\,\vec{\mathbf{b}}$ (*).

Persamaan (*) merupakan persamaan vektor bidang V yang melalui P dan sejajar dengan kedua vektor $\vec{\mathbf{a}}$ dan $\vec{\mathbf{b}}$, dimana s dan t disebut parameter. Jika vektor $\vec{\mathbf{p}}$, $\vec{\mathbf{a}}$ dan $\vec{\mathbf{b}}$, ditulis dalam komponen $\vec{\mathbf{p}} = (p_1, p_2, p_3)$, $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, a_3)$,

dan $\vec{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, b_3)$, dan $\vec{\mathbf{x}} = (x, y, z)$; maka persamaan (*) dapat ditulis dalam sistem tiga persamaan berikut:

$\mathbf{x = p_1 + s\, a_1 + t\, b_1;}$

$\mathbf{y = p_2 + s\, a_2 + t\, b_2;}$

$\mathbf{z = p_3 + s\, a_1 + t\, b_3.}$ **(**)**

Persamaan (**) diatas disebut persamaan parameter V yang melalui $P(p_1, p_2, p_3)$ dan sejajar bidang W. Jika s dan t dieliminasi menggunakan ketiga persamaan tersebut diatas akan diperoleh suatu persamaan linier yang berbentuk: $ax + by + cz + d = 0$ (***), dan duisebut persamaan kartesius bidang V.

Contoh 3:

Diketahui persamaan vektor pada bidang α : $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{p}} + s\,\vec{\mathbf{a}} + t\,\vec{\mathbf{b}}$,

dengan harga $\vec{\mathbf{p}} = (1,2,3)$, $\vec{\mathbf{a}} = (1,2,1)$, dan $\vec{\mathbf{b}} = (1,-4,-1)$. Tentukan persamaan kartesius pada bidang α tersebut.

Jawab :

Persaman parameternya : $(x,y,z) = (1,2,3) + s\,(1,2,1) + t\,(1,-4,-1)$.

$\mathbf{x = 1 + s + t}$

$\mathbf{y = 2 + 2s - 4t}$

$\mathbf{z = 3 + s - t}$

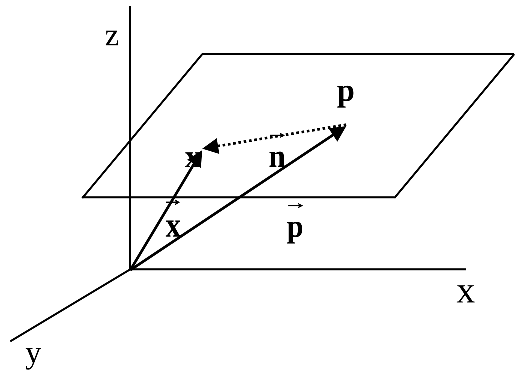
setelah harga s dan t dieliminasi diperoleh :

$y = 2 + (x + z + -4) – 2(x – z + 2) = x + z – 2 – 2x + 2z - 4 = x + 3z - 6.$

Diperoleh persamaan terakhir : $x – y + 3z – 6 = 0$

Cara lain untuk mencari persamaan vektor di bidang R3

Suatu titik P pada vektor $\vec{\mathbf{n}}$ di **R3** dapat dibuat persamaan vektor pada bidang α yang melalui P dan tegak lurus dengan vektor $\vec{\mathbf{n}}$ sesuai dengan gambar dibawah.



Gambar 11 Persamaan Vekor di R_3

Titik x pada bidang α dengan syarat $\vec{\mathbf{n}} \perp \alpha$ akan berlaku $\vec{\mathbf{p}}X\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{p}} = 0$. $\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \vec{\mathbf{p}}$ dan $\overrightarrow{\mathbf{OX}} = \vec{\mathbf{x}}$; maka

$\vec{\mathbf{p}}X = \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{p}}$, berlaku untuk setiap titik di α dan dapat ditulis persamaan vektor α, yaitu bidang yang melalui P dan tegak lurus $\vec{\mathbf{n}}$ persamaannya asebagai berikut : $(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{p}})\vec{\mathbf{n}} = 0$ (*). Vektor $\vec{\mathbf{n}}$ disebut vektor normal di α dan dapat dinyatakan dalam komponen $\vec{\mathbf{n}} = (a,b,c)$, $\vec{\mathbf{p}} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{\mathbf{x}} = (x, y, z)$ maka persamaan (*) dapat ditulis : $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$ atau $ax + by + cz + d_1 = 0$ (**), dimana $d_1 = ax_1 + by_1 + cz_1$. Jika suatu bidang di **V3** dinyatakan oleh suatu persamaan linier $ax + by + cz + d_1 = 0$ maka vektor $\vec{\mathbf{n}} = (a,b,c)$ merupakan *vektor normal* pada bidang tersebut.

Contoh 4:

Persamaan Kartesius bidang α : $2x + 6y + 3z - 6 = 0$, ditanyakan vektor normal $\vec{\mathbf{n}}$ dan titik potong α dengan sumbu X, Y, Z.

Jawab :

$\vec{\mathbf{n}}$ = (2,6,3), persamaan kartesiusnya ditulis dalam bentuk : $2x + 6y + 3z – 6 = 0$,

dibagi dengan 6 sehingga menjadi : $\frac{\mathbf{x}}{3} + \frac{\mathbf{y}}{1} + \frac{\mathbf{z}}{2} - 1 = 0$, dapat disimpulkan bahwa bidang α memotong sumbu koordinat di titik : (3,0,0), (0,1,0), dan (0,0,2).

4. Kedudukan dua bidang di ruang V_3

Kedudukan dua bidang pada ruang terdapat 2 kemungkinan, yaitu sejajar atau berpotongan, apabila dua bidang tersebut tidak sejajar maka akan berpotongan. Kedudukan dua bidang pada ruang dapat diselidiki menggunakan kedudukan normal kedua bidang tersebut.

Apabila dua bidang berpotongan tegak lurus misalnya bidang α: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1=0$ dan bidang β: $a_2x + b_2y + c_2z + d_2=0$, karena kedua normalnya tegak lurus berarti :

$\vec{\mathbf{n}}\ \vec{\mathbf{m}} = 0$ atau $a_1.a_2 + b_1.b_2 + c_1.c_2 = 0$, $\vec{\mathbf{n}}$, $\vec{\mathbf{m}}$ masing-masing merupakan normal dari bidang αdan normal dari bidang β.

Apabila kedua bidang tersebut sejajar, berarti $\vec{\mathbf{n}} = \lambda\, \vec{\mathbf{m}}$

atau $(a_1,b_1, c_1) =\lambda\, (a_2,b_2, c_2)$

5. persamaan bidang melalui garis potong dua bidang.

Misalkan k merupakan garis potong bidang α dengan persamaan $V_1(x,y,z)=0$ dan β dengan persamaan $V_2(x,y,z)=0$ [1)] . Karena koordinat titik di k memenuhi persamaan [1)] diatas berarti akan memenuhi persamaan $\lambda V_1 + \mu V_2 = 0$ [2)]. Karena [2)] merupakan suatu persamaan linier dalam x,y, dan z, maka ini merupakan persamaan suatu bidang yang melalui k, sehingga dapat dikatakan bahwa persamaan bidang yang melalui garis potong k dengan persamaan $V_1 = 0$ dan $V_2 = 0$, dapat ditulis dalam bentuk $\lambda V_1 + \mu V_2 = 0$.

Contoh 5 :

Diketahui α ialah $2x - 4y - 5z + 7 = 0$ dan β ialah $x + y + 3z - 10 = 0$.

Ditanyakan persamaan bidang γ yang melalui garis potong m dan tegak lurus bidang $\delta : 2x + 3y - z = 0$

Jawab :

Bidang melalui garis m mempunyai persamaan :

$\lambda (2x - 4y - 5z + 7) + \mu (x + y + 3z - 10) = 0$ atau

$(2\lambda + \mu) x + (-4\lambda + \mu) y + (-5\lambda + 3\mu) z + (7\lambda - 10 \mu) = 0$

karena γ tegak lurus dengan δ maka :

$(2\lambda + \mu) 2 + (-4\lambda + \mu) 3 + (-5\lambda + 3\mu) (-1) = 0$, sehingga :

$4\lambda + 2\mu - 12\lambda + 3\mu + 5\lambda - 3\mu = 0 \rightarrow -3\lambda + 2\mu = 0 \rightarrow \lambda = 2$ dan $\mu = 3$

persamaan γ : $7x - 5y - z - 16 = 0$

Contoh 6 :

Tentukan garis potong garis k dan β, dimana k : adalah $\vec{\mathbf{x}} = (1,2,-1) + t (2, 1, 0)$ dan $\beta : 2x - y + 3z = 0$

Jawab :

Dari hasil substitusi diperoleh antara $\vec{\mathbf{x}}$ dan β akan diperoleh harga t :

$2(1 + 2t) - (2 + t) + 3(-1) = 0 \rightarrow t = 1$

maka koordinat titik potongnya : $t \rightarrow \vec{\mathbf{x}} \rightarrow (1,2,-1) + 1(2, 1, 0) =$ **(3, 3, -1)**

Contoh 7:

Tentukan persamaan parameter garis potong bidang $\beta : x - z - 1 = 0$ dan $\delta : 2x - y - 3z - 5 = 0$

Jawab :

Ambil titik yang terletak pada bidang XOY dan YOZ, jika $z = 0$, maka akan diperoleh $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$, dan $2.1 - y - 3.0 - 5 = 0 \rightarrow y = -3$.

Jika $x = 0$ maka $z = -1$ dan $y = -8$

Dua titik potong tersebut adalah P (1, -3, 0) dan Q (0, -1, -8), maka persamaan parameter parameternya adalah $\vec{\mathbf{x}}$ = (1, -3, 0) + t (0, -1, -8)

RANGKUMAN

1. Vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah.
2. Besar diperoleh dari rumus $r = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ dan arah dari α = arctg y/x.
3. Dua vektor sang sejajar mempunyai sudut yang sama
4. Dua vektor yang saling tegak lurus apabila dengan harga $m_1 = -1/m_2$, dimama m_1 adalah gradien vektor 1 dan m_2 merupakan gradien vektor ke dua.
5. Suatu vektor posisi dengan titik awal O (0,0,0) dan ujung vektor A (x_1, x_2, x_3), jika berdemensi 3.
6. Vektor satuan mempunyai panjang 1 satuan.
7. Dua vektor atau lebih dapat dijumlahkan dan hasilnya dapat disebut resultan. Penjumlahan vektor secara aljabar dapat dilakukan dengan cara menjumlahkan
8. Suatu vektor juga dapat dikalikan dengan suatu skalar (bilangan real) dan akan menghasilkan suatu vektor baru.
9. Perkalian vektor dengan vektor, didefinisikan sebagai perkalian panjang masing-masing vektor dikalikan cosinus sudut antara $\vec{\mathbf{u}}$ dengan $\vec{\mathbf{v}}$, dituliskan : $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = |\vec{\mathbf{u}}| \cdot |\vec{\mathbf{v}}| \cos \varphi$

LATIHAN

1. Diketahui vektor-vektor : $\vec{\mathbf{a}}$ = (2, 1, 5), $\vec{\mathbf{b}}$ = (1, 2, 6), dan $\vec{\mathbf{c}}$ = (4, -2, 2)

 Tentukan komponen dan lukis vektor berikut :

a. $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$ b. $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$

c. $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}$ d. $2\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$

e. $2\vec{\mathbf{a}} + 3\vec{\mathbf{b}}$ f. $2\vec{\mathbf{a}} + 2\vec{\mathbf{b}} + 2\vec{\mathbf{c}}$

g. $3\vec{\mathbf{a}} + 2\vec{\mathbf{b}} - 2\vec{\mathbf{c}}$ h. $5\vec{\mathbf{a}} - 2\vec{\mathbf{b}} + c\vec{\mathbf{c}}$

i. $2\vec{\mathbf{a}} - 2\vec{\mathbf{b}} + 3\vec{\mathbf{c}}$

2. Diketahui vektor-vektor : $\vec{\mathbf{a}}$ = (4, -3, 3), $\vec{\mathbf{b}}$ = (1, 0, 1), dan $\vec{\mathbf{c}}$ = (1, 2, 5)

tentukan hasil perkalian scalar berikut ini :

a. $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$ b. $\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{a}}$

c. $(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) . \vec{\mathbf{c}}$ d. $\vec{\mathbf{c}} \cdot \vec{\mathbf{a}}$

e. $\vec{\mathbf{c}} .(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})$ f. $\vec{\mathbf{a}} . (\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{c}})$

g. $(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})\ \vec{\mathbf{c}}$ h. $\vec{\mathbf{a}} . \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}}$

i. apa yang dapat saudara simpulkan terhadap operasi diatas hubungannya dengan hukum komutatif, assosiatif, dan distributif terhadap penjumlahan dan perkalian

3. Cari persamaan garis m yang melalui titik P (2, 5) dan sejajar $\vec{\mathbf{a}}$ (4, -6)

4. Cari persamaan garis m yang melalui titik P (1, 6) dan tegak lurus $\vec{\mathbf{a}}$ (4, -6)

5. Cari persamaan garis m yang melalui titik P (2, 2, 2) dan sejajar $\vec{\mathbf{a}}$ (-6, 6, 12)

6. Tentukan persamaan garis yang melalui : A (1, 2, 3) dan B (3, 5, 7) dalam bentuk parameter dan vektor

7. Tentukan persamaan garis yang melalui : A (-1, -2, -3) dan B (2, 3, 4), dalam bentuk parameter dan vektor

8. Titik P (1, 1, -1), Q (3, 3, 2), dan R(3, -1, 2) menentukan bidang α . Tentukan titik titik dibawah ini yang terletak pada bidang α tersebut :

   a. (0, 0, 0)   b. (-3, 1, -3)   c. (3, 1, 3)

9. Tentukan parameter parameter bidang α , jika α melalui P (1, 2, 1) dan sejajar β yang melalui (0, 0, 0), (0, 1, 0) dan (1, 1, 4)

10. Tentukan parameter parameter bidang α , jika α melalui P (1, 2, 1) , (0, 1, 0) dan (1, 1, 4)

11. Suatu bidang α mempunyai persamaan parameter parameter x = 1 + s – 2t; y = 2 + s + 4t ; z = 2s + t, carilah persamaan vektor α

TEST FORMATIF

1. Diketahui vektor-vektor : $\vec{\mathbf{a}}$ = (2, 4), $\vec{\mathbf{b}}$ = (6, -2)

   Tentukan Vektor $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$

   a. (4, -6)   b. (8, 2)   c. (-4, 6)   d. (4,6)

2. Sesuai dengan soal no 1, berapa harga $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$

   a. (4, -6)   b. (8, 2)   c. (-4, 6)   d. (4,6)

3. Diketahui vektor-vektor : $\vec{\mathbf{a}}$ = (2, 2, 4), $\vec{\mathbf{b}}$ = (1, 4, 3), dan $\vec{\mathbf{c}}$ = (4, -2, 2)

Tentukan vektor $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$:

a. **(3, 6, 7)** b. (-1, 8, 9) c. (7, 4, 5) d. (-1, 2, -1)

4. Diketahui vektor-vektor : $\vec{\mathbf{a}}$ = (2, 2, 4), $\vec{\mathbf{b}}$ = (1, 4, 3), dan $\vec{\mathbf{c}}$ = (4, -2, -2)

Tentukan vektor $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$:

b. (3, 6, 7) b. (-1, 8, 9) c. (7, 4, 5) **d. (-1, 2, -1)**

5. Diketahui vektor-vektor : $\vec{\mathbf{a}}$ = (2, 2, 4), $\vec{\mathbf{b}}$ = (1, 4, 3), dan $\vec{\mathbf{c}}$ = (4, -2, -2)

Tentukan vektor $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}$:

c. (3, 6, 7) b. (-1, 8, 9) **c. (7, 4, 5)** d. (-1, 2, -1)

6. Diketahui vektor-vektor : $\vec{\mathbf{a}}$ = (2, 2, 4), $\vec{\mathbf{b}}$ = (1, 4, 3), dan $\vec{\mathbf{c}}$ = (4, -2, -2)

Tentukan vektor $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{c}}$

d. (3, 6, 7) **b. (-1, 8, 9)** c. (7, 4, 5) d. (-1, 2, -1)

7. Diketahui vektor-vektor : $\vec{\mathbf{a}}$ = (3, 4), $\vec{\mathbf{b}}$ = (6, 8)

Berapakah panjang vektor $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$:

a. 5 b. 10 **c. 15** d. jawaban tidak ada

8. Diketahui vektor-vektor : $\vec{\mathbf{a}}$ = (3, 4), $\vec{\mathbf{b}}$ = (6, 8)

Berapakah arah vektor $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$:

b. 43^0 **b. 53^0** c. 63^0 d. jawaban tidak ada

9. Diketahui vektor-vektor : $\vec{a}$ = (3, 4), dan $\vec{b}$ = (6, 8),

Sudut dari perkalian vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$:

c. 90^0 b. 45^0 c. 30^0 **d. jawaban tidak ada**

10. Diketahui vektor-vektor : $\vec{a}$ = (3, 4), dan $\vec{b}$ = (3, -4),

Sudut dari perkalian vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$:

d. 90^0 b. 45^0 c. 30^0 **d. jawaban tidak ada**

Cocokkan jawaban saudara dengan kunci jawaban test formatif 1 yang terdapat pada bagian akhir Modul ini. Hitunglah jawaban saudara yang benar. Kemuadian gunakan rumus dibawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Saudara terhadap materi Modul ini.

Rumus :

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban saudara yang benar}}{10} \times 100\ \%$$

Arti tingkat penguasaan yang saudara peroleh adalah :

80 – 100 % = Baik Sekali

70 – 79 % = Baik

60 – 69 % = Cukup

< 60 % = Kurang

Bila saudara memperoleh tingkat penguasaan 70 % atau lebih saudara dapat melanjutkan ke Modul berikutnya. Sedangkan jika tingkat penguasaan Saudara dibawah 70% saudara wajib mengulangi Modul ini, terutama pada bagian yang belum saudara kuasai.

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, Frank. 1981. *Teory and Problem of Calkulus*. : McGraw-Hill, Singapore.

Anton.1992. *Aljabar Linier Elementer.* Erlangga, Jakarta.

Bartle, Robert Gardner. 1927. *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons, Inc. USA.

Budi, Wono Setyo. 1995. *Aljabar Linier*. Gramedia. Jakarta.

Hendrawan, Andi. 2001. *Hitung Deferensial*. Debut Press. Yogyakarta.

Howard, Hutahaean. 1983. *Kalkulus Deferensial dan Integral*. Gramedia. Jakarta.

Keedy & Bittinger. 1986. Algebra and Trigonometry. Addison Wesley Publising Company. California

Leitold, Louis. 1987. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitis*. Bina Aksara. Jakarta.

Nasution, Andi Hakim. 1971. *Landasan Matematika*. Bhatara. Jakarta

Rawuh, *Matematika Pendahuluan*, Penerbit ITB. Bandung

Seputro, Theresia, 1989. *Pengantar Dasar Matematika*. Depdikbud. Jakarta.

Soepranto, J. 1979. *Pengantar Matrik*. Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi UI. Jakarta.

Wongso Sutjitro, Sutomo. 1974. *Ilmu Ukur Tanah*. Swada. Bandung.