MODUL III

DEFERENSIAL

A. PENDAHULUAN.

Tujuan dari pembelajaran Deferensial pada Modul III ini diharapkan setelah menerima materi ini dapat memahami konsep konsep Deferensial dan menerapkan dalam pembelajaran tingkat lanjut yang berkaitan dengan pengukuran, survey dan pemetaan. Deferensial merupakan ilmu dasar yang berhubungan dengan kalkulus, dimana kalkulus memiliki dua cabang utama, kalkulus diferensial dan kalkulus integral yang saling berhubungan melalui teorema dasar kalkulus. Pelajaran kalkulus adalah pintu gerbang menuju pelajaran matematika lainnya yang lebih tinggi, yang khusus mempelajari fungsi dan limit, yang secara umum dinamakan analisis matematika.

Buku materi pokok ini berisikan materi yang membahas tentang definisi deferensial atau derivatif menggunakan aturan limit fungsi, derivatif fungsi aljabar dengan rumus-rumusnya. Dalam derivatif fungsi aljabar diterangkan mengenai derivatif fungsi eksplisit, derivatif fungsi implisit, derivatif parsial, derivatif fungsi bersusun, dan derivatif fungsi ke n. Derivatif fungsi Transenden yang terdiri dari derivatif fungsi trigonometri, derivatif fungsi siklometri (invers trigonometri), derivatif fungsi eksponen, dan derivatif fungsi logaritma diberikan beserta dengan contoh soal.

Pada akhir pemberian materi diterangkan tentang penggunaan / aplikasi dari derivatif untuk mengetahui fungsi naik dan fungsi turun, maksimum dan fungsi minimum suatu fungsi, penggunaan derivatif untuk menentukan persamaan garis singgung dan pendekatan suatu nilai menggunakan derivatif fungsi menurut teorema harga rata-rata.

Penguasan materi sebelumya tentang materi persamaan dan fungsi yang terdiri dari fungsi dan persamaan dan trigonometri sangat diperlukan dalam mempelajari materi Deferensial ini. Fungsi dan persamaan yang terdiri dari fungsi dan persamaan aljabar, logaritma dan eksponen. Fungsi dan persamaan trigonometri dan siklometri banyak kaitannya dalam materi Deferensial. Penguasaan Limit fungsi yang tidak dibahas dalam materi pada materi pokok matematika ini sangat berkaitan dan harap dipelajari tersendiri.

Diharapkan setelah mempelajari materi Deferensial mahasiswa mempunyai dasar yang kuat dalam mempelajari meteri matematika selanjutnya dan digunakan dasar untuk mempelajari mata kuliah statistik dan mata kuliah lain yang berhubungan dengan pengukuran antara lain ilmu ukur tanah, ilmu hitung perataan, kerangka dasar pemetaan, dan ilmu-ilmu lain yang sesuai.

B. PENGERTIAN DEFERENSIAL

Deferensial merupakan salah satu kajian dalam Kalkulus. **Kalkulus** berasal dari bahasa Latin *calculus* yang artinya "batu kecil merupakan cabang ilmu matematika yang mencakup limit, **turunan,** integral, dan deret tak terhingga Kalkulus mempunyai aplikasi yang luas dalam bidang sains dan teknik dan digunakan untu memecahkan masalah yang kompleks yang mana aljabar tidak cukup untuk menyelesaikannnya. Kalkulus memiliki dua cabang utama, diferensial kalkulus dan integral kalkulus, yang berhubungan dengan teorema fundamental kalkulus

Dalam perkembangannya hitung deferensial merupakan perhitungan matematika tentang perubahan dan gerakan. Persoalan-persoalan tentang laju perubahan, misalnya penjalaran panas, kecepataan pertumbuhan dapat diselesaikan menggunakan hitung deferensial ini.

Gagasan utama dari hitung deferensial adalah pengertian turunan (derivatif), yang berasal dari masalah ilmu ukur, yaitu untuk menentukan garis singgung suatu titik pada kurva yang diketahui. Konsep ini baru dirumuskan pada permulaan abad 7 oleh ahli matematika perancis yang bernama Pierre de Fermat, yang mencoba menentukan maksimum dan minimum dari beberp fungsi tertentu. Selanjutnya gagasan dan metode-meode hitung deferensial dipelajari secara mendalam dan dikembangkan oleh ahli matemtika inggris Newton dan Leibniz dari Jerman.

Pada awalnya deferensial memang khusus di kembangkan untuk bidang fisika, tetapi dalam perkembangannya banyak bidang ilmu yang dapat dikembangkan menggunakan deferensial, seperti dalam cabang ilmu untuk pengukuran banyak dipergunakan deferensial untuk memecahkan masalah-masalah dan memperluas cabang ilmu tersebut.

Hitung deferensial dalam hal ini yang dibahas mengenai pengertian derivatif fungsi dan penggunaannya. Sebagai contoh untuk memahami pengertian deferensial menggunakannya sebagai laju perubahan. Apabila suatu benda bergerak dengan kecepatan yang tidak tetap dan menempuh jarak tertentu selama selang waktu tertentu, maka akan muncul masalah bagaimana cara menentukan kecepatan benda tersebut pada suatu saat t_1 suatu waktu, dengan t_1 berada pada satuan waktu tersebut. Andaikan benda tersebut menempuh jarak S meter dalam t detik dan hubungan antara S dan t ditentukan oleh suatu rumus, misalnya $S = f(t) = t^2$, Dalam hal ini kecepatannya tidak tetap karena kecepatan $v = S/t = t$, tergantung dari waktu. Dari persamaan $S = f(t) = t^2$, setelah waktu berjalan 2 detik maka harga S = 4 meter dan setelah 5 detik maka S = 25 meter. Kecepatan rata-rata dalam selang waktu antara 3 dan 5 detik merupakan perubahan jarak dibagi dengan perubahan waktu, yaitu $(25 – 4)/ (5 – 3) = 21/3 = 7$ meter/detik.

Kecepatan rata-rata dari $t = t_1$ sampai $t = t_2$ adalah $(f(t_2) - f(t_1))/ (t_2 - t_1)$ meter / detik

Untuk menentukn kecepatan suatu benda pada saat t = 2 detik, dan diambil suatu selang waktu yang singkat misalnya h, dimana h merupakan bilangan positif yang relative kecil.

Sehingga kecepatan rata-rata dari t = 2 saampai t = 2 + h tersebut adalah :

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{(2 + h) - 2} = \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{(2 + h)^2 - 2}{h} = 4 + h \text{ meter / detik}$$

Apabila harga h dibuat sekecil mungkin dan mendekati nol maka akan dapat ditulis kecepataan benda tersebut:

$$V(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} (4 + h) = 4 \text{ meter / detik}$$

Formulanya dapat ditulis :

$$\boxed{V(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h}}$$

Gagasan pada gerakan benda tadi dapat dibuat lebih umum untuk fungsi yang sembarang, sehingga dapat ditentukan ***laju perubahan nilai fungsi*** $f : x \to f(x)$ pada $x = a$, laju perubahan itu didefinisikan sebagai :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

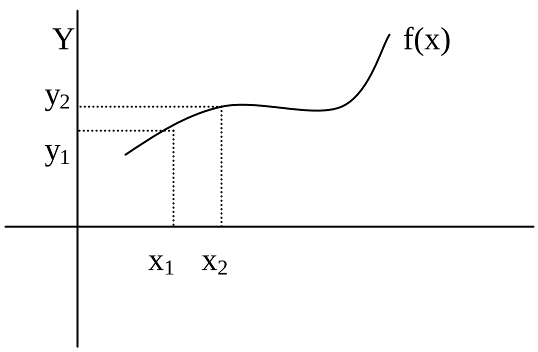
Nilai limit ini, yang diturunkan dari fungsi f, ditulis $f^1(a)$ dan disebut turunan (derifativ) dari fungsi f pada x = a

Jadi : $f^1(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$

C. DERIVATIF FUNGSI

Derivatif mempunyai arti sebagai turunan. Arti derivatif dan deferensial untuk selanjutnya digunakan bersama-sama, dan mempunyai kesamaan arti.

Diketahui suatu fungsi $f : x \rightarrow y = f(x)$, misalkan nilai $x = x_1$ dan $x = x_2$ berturut-turut memberikan nilai fungsi $y_1 = f(x_1)$ dan $y_2 = f(x_2)$.



$y_2 - y_1 = \Delta y$ dan $x_2 - x_1 = \Delta x$

Gambar 1 Definisi Deferensial

$$\frac{dy}{dx} = f^1(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Contoh 1 :

Tentukan harga turunan pertama (dy/dx), apabila $y = x^2 + 5$

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{((x+\Delta x)^2 + 5) - (x^2 + 5)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 5 - x^2 - 5}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x (2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + 0 = 2x$$

Jika $y = x^2 + 5$, maka $dy/dx = y^1 = 2x$

1. Derivatif fungsi aljabar :

1. $\frac{d}{dx}$ C = 0
2. $\frac{d}{dx}$ $x^{n} = n\, x^{n-1}$
3. $\frac{d}{dx}$ C. f(x) = C $\frac{d}{dx}$ f(x)

4. $\frac{d}{dx}$(f(x) + g(x)) = $\frac{d}{dx}$ f(x) + $\frac{d}{dx}$ g(x)

5. $\frac{d}{dx}$ (f(x) , g(x)) = g(x). $\frac{d}{dx}$ f(x) + f(x) $\frac{d}{dx}$ g(x)

6. $\frac{d}{dx}$ (f(x) / g(x)) = $\left(g(x) \frac{d}{dx} f(x) + f(x) \frac{d}{dx} g(x) \right)$ / ($g(x)^2$), untuk g(x) ≠ 0

Contoh 2 :

Jika y = f(x) = $3\, x^{2}\sqrt{x}$, tentukan harga y^l = ?

Jawab :

$$y = 3\, x^{5/2} \;\rightarrow\; y^l = 3\,(5/3)\, x^{3/2} = \mathbf{5\, x \sqrt{x}}$$

Contoh 3 :

Jika : y = $x^4 + x + 5$, tentukan harga y^l = ?

Jawab :

$$.\; y^{l} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} x^4 + \frac{d}{dx} x + \frac{d}{dx} 5 = \mathbf{4\, x^3 + 1}$$

2. Derivatif Fungsi implisit :

Persamaan y = f(x) dapat juga ditulis dalam bentuk y – f (x) = 0 atau F (x,y) = 0 yang disebut sebagai bentuk implisit y sebagai fungsi x. Menentukan $\frac{dy}{dx}$ jika y dalam bentuk implisit dapat dilakukan dengan cara :

1. jika mungkin ubah dulu dalam bentuk y = f(x), kemudian turunkan terhadap sumbu x, atau,
2. dengan menganggap y sebagai fungsi x, kemudian turunkan persamaan itu terhadap x dan selesaikan dalam bentuk $\mathbf{\frac{dy}{dx}}$

Contoh 4 :

Tentukan $\mathbf{\frac{dy}{dx}}$ jika $x^2 - 4xy + 2 = 0$;

Cara 1 :

kerena y dapat ditulis dalam bentuk ekplisit yaitu :

$$y = \frac{x^2 + 2}{4x}, \text{ atau } y = \tfrac{1}{4} x + \tfrac{1}{2} x^{-1}, \text{ maka } y^l = \tfrac{1}{4} + (1/2)(-1)x^{-2} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} x^{-2}$$

$$\text{atau } \quad y^l = \mathbf{\frac{x^2 - 2}{4x^2}}$$

Cara ke 2 :

Dengan menggunakan derivatif parsial, yaitu masing-masing diturunkan ke x dank ke y

$x^2 - 4xy + 2 = 0 \rightarrow 2x\,dx - 4y\,dx - 4x\,dy = 0 : dx$

$$2x - 4y - 4x \frac{dy}{dx} = 0, \text{ maka } \frac{dy}{dx} = (2x - 4y) / 4x = (x - 2y) / 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x - 2(x^2 + 2)/4x)}{2x} = \frac{(4x^2 - 2x^2 - 4)}{8x^2} = \frac{(2x^2 - 4)}{8x^2} = \mathbf{\frac{x^2 - 2}{4x^2}}$$

3. Derivatif Fungsi bersusun :

Jika y = f(z), dan z = g(x), maka y = f(g(x)) merupakan fungsi x. Jika y mempunyai derivative terhadap z dan z mempunyai derivative terhadap x, maka :

$\mathbf{\frac{dy}{dx}} = \mathbf{\frac{dy}{dz}\ \frac{dz}{dx}}$, yang disebut aturan rantai.

Contoh 5 :

tentukan $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}$, jika $y = (3x^2 – 4)^5$

Jawab :

misalkan $z = 3x^2 – 4$, maka $y = z^5$

$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dz}} = 5z^4$, dan $\frac{\mathbf{dz}}{\mathbf{dx}} = 6x$

jadi $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dz}} \frac{\mathbf{dz}}{\mathbf{dx}} = 5z^4.6x = 5(3x^2 – 4)^4 6x = 30x(3x^2 – 4)^4$

Contoh 6 :

Jika $y = \sqrt{(3 + 4x – x^2)}$, tujukkan bahwa $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = (2 – x) / y$

Jawab :

Misalkan $U = 3 + 4x – x^2$, maka $y = U^{1/2}$

$\frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dx}} = 4 – 2x$ dan $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{du}} = ½ U^{-1/2}$

$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{du}} \frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dx}} = ½ (3 + 4x - x^2)^{-1/2} (4 – 2x) = ½ y^{-1} (4 – 2x) = (2 – x) / y$

$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = (2 – x) / y$, terbukti

Derivatif fungsi bersusun dapat diperluas dalam derivatif fungsi parameter, yaitu terdapat persamaan-persamaan dalam parameter yang lain selain x dan y.

Sebagai contoh apabila terdapat persamaan y = f(t) dan x = f(t) maka masing masing fungsi tersebut akan diturunkan dalam t dan akan terdapat hubungan antara x dan y sebagai berikut :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$$

sebagai contoh misalkan, terdapat persamaan $y = t + 2$ dan $x = t^2 + t^{-1}$

$$\frac{dy}{dt} = 1 \text{ dan } \frac{dx}{dt} = 2t - t^{-2} = \frac{2t^3 - 1}{t^2} \text{ sehingga } \frac{dt}{dx} = -\frac{t^2}{2t^3-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \frac{t^2}{2t^3-1} = \frac{t^2}{2t^3-1}$$

4. Derivatif Fungsi Invers :

Jika y = f(z), dan misalkan fungsi f : x → y = f(x) mempunyai invers g : y → x = f(y)

Jika g mempunyai derivatif terhadap x maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = 1/ \frac{d}{dy} g(y) = 1/ \frac{dx}{dy}$$

dengan syarat

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} g(y) \neq 0$$

Contoh 7 :

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ titik (3,1) jika $x = y^2 + 2y$

Jawab :

karena $x = y^2 + 2y$ maka $\frac{dx}{dy} = 2y + 2$

dan $\frac{dy}{dx} = 1/\frac{dx}{dy} = 1 / (2y + 2) = 1 / (2 (y+ 1))$

jadi dititik (3,1) , $\frac{dy}{dx} = 1/ 2(1+ 1) = ¼$

Contoh 8 :

Tentukan $\frac{dy}{dx}$**, jika** $x = y^3 - 3 y^{-1}$

Jawab :

$$\frac{dx}{dy} = 3y^2 + 3 y^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(\mathbf{y^4} + \mathbf{1})}{y^2}, \quad \text{jadi} \quad \frac{\mathbf{dy}}{dx} = \frac{y^2}{3(\mathbf{y^4} + \mathbf{1})}$$

5. Derivatif Fungsi ordo n :

Jika terdapat fungsi y = f(x) mempunyai derivaatif terhadap x, yaitu $\mathbf{\frac{dy}{dx} = y^{l} = f^{l}(x)}$**,**

derivative ordo 2 ditulis $\frac{d^2 y}{dx^2} = y^{ll}(x)$, dan derivative ordo n ditulis $\frac{d^{n}y}{dx^n} = y^n(x)$

Contoh 9 :

Jika $y = x^3 - 3x^2$ tentukan d^3y/dx^3

Jawab :

$\mathbf{y^l = 3x^2 - 6x}$

$\mathbf{y^{ll} = 6x - 6}$

$\mathbf{y^{lll} = 6}$**, jadi** $\mathbf{d^3y/dx^3 = 6}$

6. Derivatif Fungsi Trigonometri

$$\frac{dy}{dx} = f^{l}(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x2) - f(x1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x1 + \Delta x) - f(x1)}{\Delta x}$$

jika y = sin x, tentukan harga dy/dx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\text{Sin}(x + \Delta x) - \text{Sin}(x)}{\Delta x}$$

$\text{Sin}\,\alpha - \text{Sin}\,\beta = 2\,\text{Sin}\,½(\alpha - \beta)\,\text{Cos}\,½(\alpha + \beta)$

$\Delta y = \text{Sin}(x + \Delta x) - \text{Sin}(x) = 2\,\text{Sin}\,½(x + \Delta x - x)\,\text{Cos}\,½((x + \Delta x - x)$

$= 2\,\text{Sin}\,½(\Delta x)\,\text{Cos}(x + ½\Delta x)$

$$\frac{dy}{dx} = f^{l}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\,\text{Sin}\,½(\Delta x)\,\text{Cos}(x + ½\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{1}{2}(\Delta x) \cos (x + \frac{1}{2}\Delta x)}{\frac{1}{2}\Delta x}$$

misalkan h = ½ Δx , maka h = ½ 0 = 0,

maka persamaan diatas dapat dituliskan sebagai :

$$\frac{dy}{dx} = f^l(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h \cos (x + h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \lim_{h \to 0} \cos (x + h) = 1 \cdot \cos (x + 0) = \cos x$$

Jadi jika y = Sin x maka $\mathbf{y^l = \frac{dy}{dx} = \cos x}$

Contoh 10

Jika y = Cos x. tentukan harga y^l

Jawab :

$y = \cos x = \sin (90^0 - x)$

$\mathbf{y^l} = \cos (90^0 - x).(-1) = -\cos (90^0 - x) = -\sin x$

Contoh 11

Jika y = tg x tentukan harga y^l

Jawab :

$$y = \text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{f(x)}{g(x)} =$$

$$y^l = \frac{f'(x).g(x) - g'(x).f(x)}{g2(x)} = \frac{\cos x.\cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos x \cos x} = \frac{1}{\cos x.\cos x} = \text{Sec}^2 x$$

jadi jika y = tgx maka $y^l = \text{Sec}^2 x$

7. Derivatif Fungsi Trigonometri

1. Jika y = Sin x maka $y^l = \cos x$

2. Jika $y = \text{Cos } x$ maka $y^{l} = -\text{Sin } x$
3. Jika $y = \text{Tg } x$ maka $y^{l} = \text{Sec}^{2} x$
4. Jika $y = \text{Ctg } x$ maka $y^{l} = -\text{Cosec } x$
5. Jika $y = \text{Sec } x$ maka $y^{l} = \text{Sec } x \text{ Tg} x$
6. Jika $y = \text{cosec } x$ maka $y^{l} = -\text{Sec } x.\ \text{Ctg } x$
7. Jika $y = \text{Sin } f(x)$ maka $y^{l} = \text{Cos } f(x).\ f^{l}(x)$
8. Jika $y = \text{Cos } f(x)$ maka $y^{l} = -\text{Sin } f(x).\ f^{l}(x)$
9. Jika $y = \text{Sin}^{n} x$ maka $y^{l} = n\ \text{Sin}^{n-1} x.\ \text{Cos } x$
10. Jika $y = \text{Cos}^{n} x$ maka $y^{l} = n\ \text{Cos}^{n-1} x.\ (-\text{Sin } x)$
11. Jika $y = \text{Tg}^{n} x$ maka $y^{l} = n\ \text{Tg}^{n-1} x.\ (\text{Sec}^{2} x)$

8. Derivatif Fungsi Siklometri

Fungsi siklometri merupakan invers dari fungsi trigonometri.

Jika terdapat fungsi y = arcsin x, tentukan harga turunan pertamanya

Fungsi y = arcsin x. maka x = sin y, sehingga $\mathbf{\frac{dx}{dy} = \cos y}$ **atau** $\mathbf{\frac{1}{dy/dx} = \cos y}$

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} = 1/\text{Cos } y}$$

terdapat rumus bahwa $\text{Sin}^2 x + \text{Cos}^2 x = 1$ atau $\text{Sin}^2 y + \text{Cos}^2 y = 1$, sehingga diperoleh

$\text{Cosy} = \sqrt{(1 - \text{Sin}^2 y)}$

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} = 1/\text{Cos } y =} 1/\sqrt{(1 - \text{Sin}^2 y)} = 1/\sqrt{(1 - x^2)}$$

dengan cara yang sama dengan diatas akan diperoleh :

1. Jika y = arc cos x maka $y^{l} = -\dfrac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}$

.
2. Jika y = arc tg x maka $y^{l} = \dfrac{1}{(1 + x^2)}$

3. Jika y = arc ctg x maka $y^{1} = -\dfrac{1}{(1 + x^2)}$

4. Jika y = arc sec x maka $y^{1} = \dfrac{1}{x\sqrt{(x^2 - 1)}}$

5. Jika y = arc cosec x maka $y^{1} = \dfrac{1}{-x\sqrt{(x^2 - 1)}}$

9. Derivatif Fungsi Logaritma dan Exponen

Fungsi logaritma merupakan invers dari fungsi eksponen dan begitu pula sebaliknya

Menurut rumus binonium Newton, untuk bilangan asli n berlaku

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n$$

jika dimisalkan a = 1 dan b = 1/n, maka diperoleh :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1^n + \frac{n}{1}\,\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{1}{n.n} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n!}\,\frac{n!}{n^n}$$

untuk harga n = ~ , maka harganya menjadi :

$$\lim_{n\to\sim}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\sim}\left(1 + 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots\ldots\ldots\right)$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots = 2{,}7182\ldots\ldots = e$$

jika terdapat fungsi logaritma y = f(x) = ${}^{a}\log x$ maka :

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$= {}^{a}\log(x + \Delta x) - {}^{a}\log x$

$$= {}^{a}\log\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = {}^{a}\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\,{}^{a}\log\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = {}^{a}\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x}$$

$$= \frac{1}{x}\,{}^{a}\log\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x.\,1/x} = \frac{1}{x}\,{}^{a}\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$$

maka :

$$\lim_{\Delta x \to \sim}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \sim}\left(\frac{1}{x}\;{}^{a}\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right.$$

$$\lim_{\Delta x \to \sim}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\;{}^{a}\log\ \lim_{\Delta x \to \sim}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} = \frac{1}{x}\;{}^{a}\log e$$

dengan cara yang sama jika $y = \ln x$ maka harga y^{l} akan sama dengan :

$$\lim_{\Delta x \to \sim}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\;{}^{e}\log\ \lim_{\Delta x \to \sim}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} = \frac{1}{x}\;{}^{e}\log e$$

harga jika $y = \ln x$ maka harga $y^{l} = \frac{1}{x}$

dengan cara yang sama akan dapat ditentukan :

1. $y = a^{x}$ maka $dy/dx = y^{l} = a^{x} \ln a$
2. $y = \ln(f(x))$ maka $dy/dx = y^{l} = f^{l}(x) / f(x)$
3. $y = e^{x}$ maka $dy/dx = y^{l} = e^{x} \ln e = e^{x}$
4. $y = e^{f(x)}$ maka $dy/dx = y^{l} = f^{l}(x)\, e^{f(x)}$

Contoh 12 :

Jika $y = \ln(x+2)^{3}$ tentukan harga y^{l}

Jawab :

$y = \ln(x+2)^{3} = 3 \ln(x+2)$

$$\frac{dy}{dx} = 3\,\frac{1}{(x+2)}\,\frac{d}{dx}(x+2) = \frac{3}{(x+2)}$$

Contoh 13 :

Jika $y = e^{x2}$ tentukan harga y^l

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x2}\,\frac{d}{dx}(x^2) = 2x\,e^{x2}$$

Contoh 14 :

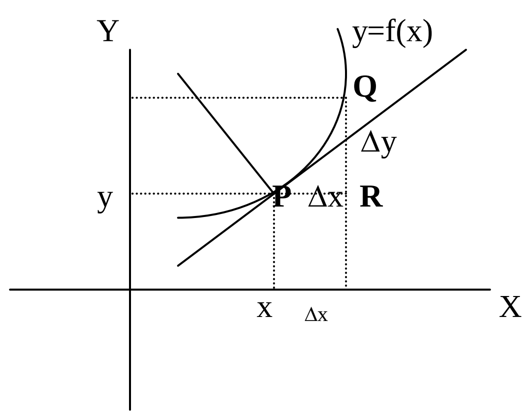
Jika $y = \ln(3x^2)$ tentukan harga y^l

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^2}\,\frac{d}{dx}(3x^2) = \frac{1}{3x^2}(6x) = \frac{2}{x}$$

D. PENERAPAN DERIVATIF

1. Sebagai Garis Singgung



Gambar 2 Deferensial sebagai garis singgung

untuk menentukan persamaan garis singgung pada suatu titik yang terletak pada kurva (grafik fungsi) yang diketahui, perlu ditinjau arti ilmu ukiur dari fyngsiu turunan (a, f(a)) pada suatu kurva.

Dari definisi pada pembahasan deferensial diatas disebutkan bahwa :

$$f^{1}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Misalkan P(a,f(a)) dan Q ((a + Δx), f(a + Δx))

Maka PR = Δx dan PQ = f(a + Δx) – f(a)

$$\text{Gradien } PQ = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad PQ \text{ merupkan tali busur}$$

Bila Δx dibuat sekecil mungkin (mendekati 0), maka gradient garis PQ menjadi Gradien garis singgung pada titik P (a, f(a + Δx)),

oleh karena itu Gradien garis singgung dititik P (a, f(a + Δx)), adalah :

$$f^{1}(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

jadi arti ilmu ukur dari fungsi turunan disustu titik adalah gradient garis singgung pada grafik fungsinya dititik yang bersangkutan.

Misalkan persamaan garis singgung dititik x = 2, pada suatu fungsi $y = 6x - x^3$ adalah :

untuk $y = 6x - x^3$, maka $f^{1}(x) = y^{1} = 6 - 3x^2 \rightarrow f^{1}(2) = 6 - 3(2)^2 = -6$

pada titik x = 2, hrga $y = 6(2) - (2)^3 = 12 - 8 = 4$, jadi titik P (2,4)

jadi persamaan garis singgung grafik fungsi $y = 6x - x^3$ pada titik (2,4) adalah :

$y = -6(x-2) + 4 = -6x + 16 \quad \rightarrow \quad y = -6x + 16$

Contoh 15 :

Tentukan sutu titik pada grafik fungsi $y = x^2$ yang garis singgungnya tegak lurus garis $x - 2y + 5 = 0$

Jawab :

Perhatikan garis $x - 2y + 5 = 0$, atau $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$
gradient garis singgung yang tegak lurus garis $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$ (gradient = m = ½) adalah -2 (syarat tegak lurus, jika m = - 1/m , m = 1/2, jadi n = -2)
fungsi $y = f(x) = x^2 \rightarrow f^1(x) = 2x$
akan ditentukan x sehingga $f^1(x) = -2$, diperoleh $2x = -2$, atau $x = -1$
untuk $x = -1$ diperoleh $y = f(x) = x^2 = (-1)^2 = 1$
jadi titik pada grafik $y = x^2$ yang garis singgungnya tegak lurus garis $x - 2y + 5 = 0$ adalah pada titik (-1, 1)

2. Harga ekstrim suatu fungsi

Misalkan f suatu fungsi yang didefinisikan pada interval tertentu I, f dinyatakan sebagai **fungsi naik** apabila $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$ untuk setiap harga $x_{1,}\ x_2$ didalam interval I, dan f dinamakan **fungsi turun** apabila $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$ untuk setiap harga $x_{1,}\ x_2$ didalam interval I.

Sifat : 1. f fungsi naik pada I $\Leftrightarrow f^1(x) > 0\ \forall\ x \in I$

2. f fungsi turun pada I $\Leftrightarrow f^1(x) < 0\ \forall\ x \in I$

misalkan fungsi $y = x^2 + 6x + 8$, tentukan harga dimana fungsi naik dan fungsi turunnya
$y = x^2 + 6x + 8 \rightarrow f^1(x) = 2x + 6$, untuk $f^1(x) = 0$ maka harga $x = -3$

$f^{l}(x)$ - - - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + +

…….. -5 -4 -3 - 2 -1 …..

dari gambar diatas terlihat harga $x < -3$ mempunyai harga negative (-)

atau $f^{l}(-3) < 0$ berarti merupakan fungsi turun.

pada gambar diatas terlihat harga $x > -3$ mempunyai harga positif (+)

atau $f^{l}(-3) > 0$ berarti merupakan fungsi naik.

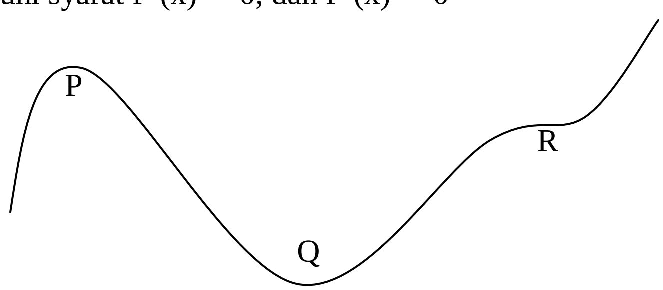
Grafik fungsi disebut maksimum apabila merupakan fungsi naik dan mencapai nilai ekstrim ($f^{l}(x) = 0$) dan diikuti oleh fungsi turun.

Fungsi mempunyai nilai maksimum disuatu titik apabila memenuhi syarat
$f^{l}(x) = 0$, dan $f^{ll}(x) < 0$

Grafik fungsi disebut minimum apabila merupakan fungsi turun dan mencapai nilai ekstrim ($f^{l}(x) = 0$) dan diikuti oleh fungsi naik.

Fungsi mempunyai nilai maksimum di suatu titik apabila memenuhi syarat $f^{l}(x) = 0$, dan $f^{ll}(x) > 0$

Grafik fungsi mempunyai nilai stasioner apabila merupakan fungsi turun dan mencapai nilai ekstrim ($f^{l}(x) = 0$) dan diikuti oleh fungsi turun, atau merupakan fungsi naik dan mencapai nilai ekstrim ($f^{l}(x) = 0$) dan diikuti oleh fungsi naik. Fungsi mempunyai nilai stasioner disuatu titik (disebut juga titik belok) apabila memenuhi syarat $f^{l}(x) = 0$, dan $f^{ll}(x) = 0$



Gambar 3 Ekstrim Fungsi

Titik P merupakan harga maksimum dari suatu fungsi, Q merupakan harga minimum dari sutu fungsi dan titik R merupakan titik stasioner.

Nilai maksimum, minimum dan titik belok suatu fungsi dapat didibedakan menggunakan turunan pertama saja, ini disebut sebagaiu uji turunan pertama. Yaitu dengan cara memberikan interval pada sebelum dan setelah harga ekstrimnya. Tetapi akan semakin lengkap dan jelas apabila membedakan maksimum, minimum dan titik belok suatu fungsi menggunakan uji turunan kedua, yaitu maksimum apabila $f^{ll}(x) < 0$, minimum apabila $f^{ll}(x) > 0$ dan merupakan titik belok apabila $f^{ll}(x) = 0$.

Suatu fungsi f(x) apabila berupa fungsi aljabar polimomial atau fungsi aljabar pangkat n, akan mempunyi maksimum nilai ekstrim sebanyak n. Sebagai contoh apabila fungsi pangkat 3 maka kemungkinan akan mempunyai titik ekstrim sebanyak 3 buah.

Contoh 16:

Jika terdapat fungsi $y = 3x^5 - 5x^3$ tentukan titik dimana mempunyai nilai maksimum, minimum atau titik beloknya

Jawab :

$y = f(x) = 3x^5 - 5x^3 \Rightarrow f^{l}(x) = 15x^4 - 15x^2 = 0$

$\Rightarrow f^{l}(x) = 15x^2 (x^2 - 1) = 0$

dari persamaan diatas diperiolek harga $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, dan $x_3 = -1$.

Titik P (0, 0), Q (1, -2) dan R (-1, 2)

$\mathbf{f^{ll}(x) = 60x^3 - 30x}$

pada titik P (0,0) $\Rightarrow f^{ll}(0) = 60 (0)^3 - 30 (0) = 0$

titik P (0,0) merupakan titik **stasioner** atau **titik belok**.

pada titik Q (1,-2) $\Rightarrow f^{ll}(1) = 60(1) - 30(1) = 30 > 0$

jadi titik Q merupakan titik ekstrim **minimum,** karena harga $f^{ll}(0) > 0$

pada titik R (-1,2) $\Rightarrow f^{ll}(0) = 60(-1)^3 - 30(-1) = -60 + 30 = -30 > 0$

jadi titik R merupakan titik ekstrim **maksimum** , karena harga $f^{ll}(0) < 0$

3. Penggunaan Nilai Maksimum dan Minimum

Apabila $y = f(x)$, kurva tersebut akan mempunyai nilai ekstrim (dapat maksimum atau minimum) pada titik y^1 atau $f^1 (x) = 0$. Akan mempunyai nilai maksimum apabila $f^{11} (x) < 0$ dan $f^{11} (x) > 0$. Harga tersebut dapat digunakan mencari harga maksimum dan minimum suatu kasus.

Contoh 17 :

Seseorang mempunyai tali sepanjang 100 m. Tali tersebut hendak digunakan untuk membuat luasan bidang tanah. Dengan tali tersebut tentukan luas maksimum yang dapat dibuat.

Jawab :

Luas Bidang (L) = panjang (x) x lebar (y) = x y

Keliling = 2 x (panjang + lebar) = 2 (x + y).

Keliling = $100 = 2x + 2y \rightarrow 50 = x + y \rightarrow$ $\mathbf{y = 50 - x}$

$L = x \cdot y = x(50 - x) = 50x - x^2$

$L^1 = 50 - 2x$

Syarat ekstrim maksimum dan minimum $f^1(x) = 0$, maka :

$L^1 = 50 - 2x = 0 \rightarrow 2x = 50$ atau $x = 25$

$y = 50 - x = 50 - 25 = 25$

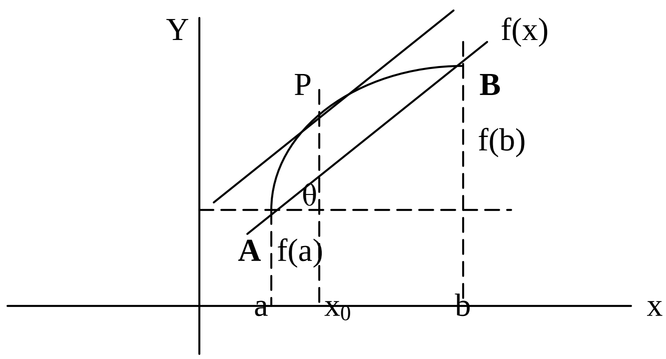
$L^1 = 50 - 2x$

$L^{11} = -2 < 0$ ekstrimnya berupa **maksimum.**

untuk memenuhi supaya luasan bidang dapat dibuat maksimum apabila harga panjang dan lebarnya masing-masing adalah 25 m dan 25 m. Jadi luasan empat persegi akan bernilai maksimum apabila mempunyai panjang dan lebar sama (panjang = lebar) atau luasan berupa bujur sangkar.

4. Pendekatan suatu nilai rata-rata

Jika f (x) kontinyu pada (a,b) dan $f^{1}(x)$ ada pada (a,b) maka terdapat nilai $x = x_0$ dengan ketentuan $a < x_0 < b$ sehingga berlaku $f^{1}(x) = \dfrac{\mathbf{f(b)-f(a)}}{\mathbf{b-a}}$



P (x_0, f(x_0))

Gambar 4 Grafik Pendekatan Nilai

dari gambar diatas terlihat bahwa $\dfrac{\mathbf{f(b)-f(a)}}{\mathbf{b-a}}$ = tg θ merupakan gradient garis AB.

Jika P (x_0, f(x_0)) pada f(x), maka $f^{1}(x)$ merupakan gradient garis singgung dititik P (x_0, f(x_0)).

Secara geometris teorema nilai rata-rata ini menyatakan bahwa terdapat titik pada kurva f(x) diantara A dan B, sehingga garis singgungnya sejajart dengan tali busur AB.

Contoh 18 :

Hitung pendekatan dari nilai $\sqrt[4]{84}$

Jawab

Misalkan f(x) = $\sqrt[4]{\mathbf{x}}$, a = 81 dan b = 84 maka f(x) kontinyu pada (81, 84)

$f^{1}(x) = \frac{1}{4} x^{-3/4}$, pada (81, 84) dan terdapat nilai x_0 dengan $81 < x_0 < 84$ sehingga berlaku

$$f^{1}(x) = \frac{1}{4} x^{-3/4} = \frac{\mathbf{f}(84) - \mathbf{f}(81)}{84 - 81}$$

$f(84) = f(81) + 3.\ \frac{1}{4}\ x^{-3/4} = 3 + 3.1/4\ (\ 81\ \ )^{-3/4}$, karena harga x tidak diketahui diambil harga x = 81, sehingga harga $f(84) = 3 + 3.\ \frac{1}{4}\ (3^{4})^{-3/4} = 3 + 3/4\ (3^{-3}\ )$

$$f(84) = 3 + 3.\ \tfrac{1}{4}\ (1/27) = 3 + 1/36 = 3{,}02777$$

jadi harga pendekataan dari $\sqrt[4]{\mathbf{x}}$ = 3,02777

RANGKUMAN

1. $$f^{l}(x) = y^{l} = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2. a. jika $y = k$ maka $y^{l} = 0$

   b jika $y = x^{n}$ maka $y^{l} = n\,x^{n-1}$

   c. jika $y = f(x) \pm g(x) \pm h(x) \pm \ldots\ldots\ldots$ maka

   $y^{l} = f^{l}(x) \pm g^{l}(x) \pm h^{l}(x) \pm \ldots\ldots\ldots$

   d. jika $y = f(x) . g(x)$ maka $y^{l} = f^{l}(x)\, g(x) + g^{l}(x).\, f(x)$

   e jika $y = f(x) / g(x)$ maka $y^{l} = (f^{l}(x)\, g(x) - g^{l}(x).\, f(x)) / g^{2}(x)$

   f. jika $y = (f(x))^{n}$ maka $y^{l} = n\, f(x)^{n-1}.\, f^{l}(x)$

3. a. Jika $y = \text{Sin } x$ maka $y^{l} = \text{Cos } x$

   b. Jika $y = \text{Cos } x$ maka $y^{l} = -\text{Sin } x$

   c. Jika $y = \text{Tg } x$ maka $y^{l} = \text{Sec}^{2} x$

   d. Jika $y = \text{Ctg } x$ maka $y^{l} = -\text{Cosec } x$

   e. Jika $y = \text{Sec } x$ maka $y^{l} = \text{Sec } x \text{ Tgx}$

   f. Jika $y = \text{cosec } x$ maka $y^{l} = -\text{Sec } x.\ \text{Ctg } x$

   g. Jika $y = \text{Sin } f(x)$ maka $y^{l} = \text{Cos } f(x).\ f^{l}(x)$

   h. Jika $y = \text{Cos } f(x)$ maka $y^{l} = -\text{Sin } f(x).\ f^{l}(x)$

   i. Jika $y = \text{Tg } f(x)$ maka $y^{l} = \text{Sec } f(x)\ f^{l}(x)$

   j. Jika $y = \text{Sin}^{n} x$ maka $y^{l} = n\,\text{Sin}^{n-1} x.\ \text{Cos } x$

   k. Jika $y = \text{Cos}^{n} x$ maka $y^{l} = n\,\text{Cos}^{n-1} x.\ (-\text{Sin } x)$

l. Jika $y = Tg^{n}\ x$ maka $y^{l} = n\ Tg^{n-1}\ x.\ (Sec^{2}\ x)$

4. a. Jika $y = arc\ sin\ x$ maka $y^{l} = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}$

b. Jika $y = arc\ cos\ x$ maka $y^{l} = - \dfrac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}$

c. Jika $y = arc\ tg\ x$ maka $y^{l} = \dfrac{1}{(1 + x^2)}$

d. Jika $y = arc\ ctg\ x$ maka $y^{l} = - \dfrac{1}{(1 + x^2)}$

e. Jika $y = arc\ sec\ x$ maka $y^{l} = \dfrac{1}{x\sqrt{(x^2 - 1)}}$

f. Jika $y = arc\ cosec\ x$ maka $y^{l} = \dfrac{1}{-x\sqrt{(x^2 - 1)}}$

5. a. $y = a^{x}$ maka $dy/dx = y^{l} = a^{x} \ln a$

b. $y = \ln (f(x))$ maka $dy/dx = y^{l} = f^{l}(x) / f(x)$

c. $y = e^{x}$ maka $dy/dx = y^{l} = e^{x} \ln e = e^{x}$

d. $y = e^{f(x)}$ maka $dy/dx = y^{l} = f^{l}(x)\ e^{f(x)}$

LATIHAN

1. Jika $y = x^5 + x^2\sqrt{x} - 7$, tentukan harga $\frac{dy}{dx}$

2. Jika $z = \sqrt{t^5} - \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$, tentukan harga $\frac{dz}{dt}$

3. Jika $y = (5x^3 - 5)^3$, tentukan harga $\frac{dy}{dx}$

4. Jika $y = \sqrt{(4 + 4x - x^2)}$, tunjukkn harga $\frac{dy}{dx} = \frac{2-x}{y}$

5. Tunjukkan bahwa $\frac{dy}{dx} = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}}$ jika $y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$

6. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dititik (3,1) jika $x = y^2 + 2y$

7. Tentukan $\frac{dy}{dx}$, jika $x = y^3 +- \frac{3}{y}$

8 Jika $y = \sqrt{1+z}$ dan $z = \sqrt{x}$, tentukan $\frac{dy}{dx}$

9. Tentukan $\frac{ds}{dt}$, jika $t = \sqrt{(9 - s^2)}$

10. Jika $r = \text{Cos}(1 - x^2)$, tentukan $\frac{dr}{dx}$

11. Tentukan $\frac{dy}{dx}$, jika a). $f(x) = \text{Cos}\,\frac{2}{x}$, b) $f(x) = \text{Sin}^3 x$

12, Tunjukkan bahwa $\frac{dy}{dx}$ = Sin 2x, jika y = ½ Tg x.Sin 2x

13. Tentukan $\frac{dy}{dx}$, jika a). y = arc sin (x – 1) b). arc tg $5x^2$

14. Tunjukkan bahwa $\frac{dy}{dx}$ = - 1/ (1 + x^2), jika f (x) = arc ctg ($\frac{1+x}{1-x}$)

15. Tentukan $\frac{ds}{dt}$, jika a). S = $t^2 e^t$ dan b). S = $\ln^2$ (3 + t)

16. Tentukan $\frac{ds}{dt}$, jika a). S = $t^4 e^{2t}$ dan b). S = ln $(2 + t)^3$

17. Jika y = x ln x – x, tunjukkan bahwa $\frac{dy}{dx}$ = ln x

18. Tentukan $\frac{dy}{dx}$, jika a) x = 2 cos θ dan y = sin 2 θ

b) x = $\cos^3$ t dan y = $\sin^3$ t

19. Tentukan persamaan garis singgung dan normal :

a. Ellips $4x^2 + 9y^2 = 40$ di titik (-1, 2)

b. Kurva y = ln x, dititik dengan x = e^2

c. Kurva $y^2 = x^3$, dititik (4, 8)

d. Parabola $x^2 + 2y = 8$ dengan garis normal sejajar garis 6x + 5y – 1 = 0

20. Tentukan turunan ke empat dari persamaan a). y = $4x^3 - x^4$, b). y = $x^{-1/2}$

c). y = e^{3x} dan d). Y = 3 ln 3x.

21. Tentukan f^{lll} (Π/2) jika a). f (x) = Sin x, b). f(x) = Cos x

c). f(x) = 2 Sin 2 x d). y = 3x Cos 2x

22. Tentukan dimana fungsi f naik atau turun, jika :

a. $f(x) = x^3/6 - x^2$

b. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

c. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

d. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$

23. Tentukan Titik maksimum dan maksimum fungsi f jika :

a. $f(x) = x^3/6 - x^2$

b. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

c. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

d. $f(x) = x^4 - 4x^2$

e. $f(x) = x\, e^{-x2}$

24. Tentukan interval dimana fungsi f naik/turun, maksimum dan minimum fungsi jika :

a. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

b. $f(x) = x^4 - 4x^2$

c. $f(x) = e^{-x2}$

d. $f(x) = \ln x$

25. Lukislah grafik fungsi f, jika :

a. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

b. $f(x) = x\, e^{x2}$

c. $f(x) = x(12 - 2x)^2$

d. $f(x) = 2 + x^{2/3}$

26. Hitunglah luas terbesar empat persegi panjang yang dapat dibuat dalam lingkaran berjari-jari 4

27. Akan dibuat kaleng silinder tanpa tutup atas dengan volume 1 liter, apabila tebal kaleng diabaikan, tentukan ukuran kaleng sehingga bahan pembuatnya minimum.

28.Tentukan pendekatan dari harga a) $\sqrt[3]{30}$ b). c). $\sqrt{90}$

d). $\sqrt[5]{50}$ f). $4\sqrt{120}$

29. Gunakan pendekatan nilai rata-rata untuk mengerjakan :

a) $f(x) = x^3 - 2x^2$ pada (-1, 3)

b) $f(x) = 3x^2 + 4x - 3$ pada (1, 3)

30. Jika :

a). $f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 12$

b). $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5$

tentukan :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

TEST FORMATIF

1. Jika $y = 3x^4 - 2x - 12$, tentukan harga $\frac{dy}{dx}$

   a. $\frac{dy}{dx} = 12x^3 - 2$

   b. $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 2$

   c. $\frac{dy}{dx} = 12x^2 - 2x$

   d. $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 12$

2. Jika $y = (x^4 - 12)^3$, tentukan harga $\frac{dy}{dx}$

   a. $3(x^4 - 12)^2$

   b. $(x^4 - 12)^3 (4x^3)$

   a. $4x^3 (x^4 - 12)^2$

   d. $3(x^4 - 12)^2 (4x^3)$

3. Jika $y = x\sqrt{(x^2 - 3)}$, tentukan harga $\frac{dy}{dx}$

   a. $2\sqrt{(4x^3 - 6x)(x^4 - 3x^2)}$

   b. $(4x^3 - 6x) / 2\sqrt{(x^4 - 3x^2)}$

   c. $(4x^3 - 6x)(x^4 - 3x^2)$

   d. $(4x^3 - 6x)(x^4 - 3x^2)^{-1/2}$

4. Jika $f(x) = \text{Cos}^2 x - \text{Sin}^2 x$ tentukan harga $f^l\,(30^0)$

a. $\sqrt{3}$

b. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

c. $\sqrt{2}$

d. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

5. Jika $6x^2 - 3y + 12x - 5 = 0$, tentukan harga $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}$

a. $6x + 12$

b. $x^2 + 4$

c. $4x - 4$

d. $-4x^2 + 4$

6. Jika $y = \cos 2\theta$ dan $x = \text{Sin}\ (90^0 - \theta)$, tentukan harga $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}$

a. $4 \sin 2\theta.\ \text{Cos}\ \theta$

b. $-4\ \text{Sin}\ \theta$

c. $2 \sin 2\theta\ /\ \text{Cos}\ \theta$

d. $\text{Cos}\ 2\theta.\ \text{Sin}\ \theta$

7. Jika $y = 5^{\,x}$, tentukan harga $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}$

a $5^x \ln 5$b.

b. $x \ln 5$

c. $\ln 5^x$

d. $x^5 \ln 5$

8. Jika $y = e^{\,3x - 5}$ tentukan harga $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}$

a. $3\,e^{\,3x - 5}$

b. $(3x - 5)\,e^{\,3}$

c. $3\,e^{\,3x}$

d. $(3x - 5)\,e^{\,3x - 5}$

9. Jika $y = \text{Sin } x. \text{Cos } x$, tentukan harga turunan ketiganya (y^{lll})

a. – 2 Sin 2x

b. 4 Cos 2x

a. 2 Cos 2x

d. - 4 Cos 2x

10. Parabola $x^2 - y = 6$ dengan garis normal tegal lurus garis $x + 2y – 4 = 0$ tentukan persamaan garis normalnya

a. $y = - 2x + 4$

b. $y = 2x – 6$

c. $y = 2x + 4$

b. $y = \frac{1}{2} x + 6$

Cocokkan jawaban saudara dengan kunci jawaban test formatif 1 yang terdapat pada bagian akhir Buku materi pokok ini. Hitunglah jawaban saudara yang benar. Kemuadian gunakan rumus dibawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Saudara terhadap materi Buku materi pokok ini.

Rumus :

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban saudara yang benar}}{10} \times 100\ \%$$

Arti tingkat penguasaan yang saudara peroleh adalah :

80 – 100 % = Baik Sekali

70 – 79 % = Baik

60 – 69 % = Cukup

< 60 % = Kurang

Bila saudara memperoleh tingkat penguasaan 70 % atau lebih saudara dapat melanjutkan ke Buku materi pokok berikutnya. Sedangkan jika tingkat penguasaan Saudara dibawah 70% saudara wajib mengulangi Buku materi pokok ini, terutama pada bagian yang belum saudara kuasai.

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, Frank. 1981. *Teory and Problem of Calkulus*. : McGraw-Hill, Singapore.

Anton.1992. *Aljabar Linier Elementer*. Erlangga, Jakarta.

Bartle, Robert Gardner. 1927. *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons, Inc. USA.

Budi, Wono Setyo. 1995. *Aljabar Linier*. Gramedia. Jakarta.

Hendrawan, Andi. 2001. *Hitung Deferensial*. Debut Press. Yogyakarta.

Howard, Hutahaean. 1983. *Kalkulus Deferensial dan Integral*. Gramedia. Jakarta.

Keedy & Bittinger. 1986. Algebra and Trigonometry. Addison Wesley Publising Company. California

Leitold, Louis. 1987. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitis*. Bina Aksara. Jakarta.

Nasution, Andi Hakim. 1971. *Landasan Matematika*. Bhatara. Jakarta

Rawuh, *Matematika Pendahuluan*, Penerbit ITB. Bandung

Seputro, Theresia, 1989. *Pengantar Dasar Matematika*. Depdikbud. Jakarta.

Soepranto, J. 1979. *Pengantar Matrik*. Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi UI. Jakarta.

Wongso Sutjitro, Sutomo. 1974. *Ilmu Ukur Tanah*. Swada. Bandung.