MODUL II

GEOMETRI

A. PENDAHULUAN

Tujuan dari pembelajaran materi pokok Geometri adalah setelah mempelajari materi ini diharapkan memahami konsep konsep dasar dari Geometri dan dapat memahami materi pengertian geometri yang terditi dari titik, bidang dan ruang. Pada demensi dua berkaitan dengan bidang bidang berupa segitiga, lingkaran, oval, persegi, persegi panjang, jajaran genjang, belah ketupat, bola, kerucut, silinder, piramida, prisma, Perhitungan luas bidang merupakan terapan yang harus dikuasai dalam pembelajaran ini. Mempelajari geometri mempunyai hasil banyak keterampilan dasar dan membantu untuk membangun kemampuan berpikir logika, penalaran analitis dan pemecahan masalah. Geometri memungkinkan kita untuk memahami ruang dalam sebuah kehidupan nyata yang membantu siswa dalam memahami konsep-konsep yang lebih baik. Geometri memiliki banyak praktek penggunaan, dari yang paling dasar sampai perkembangan teknologi yang semakin berkembang.

Geometri disebut sebagai ilmu praktis dan berhubungan dengan formula yang berbeda dari luas, panjang dan volume. Luas lingkaran, keliling, dan volume silinder adalah beberapa konsep dasar topik Geometri. Dengan proses belajar ini, siswa dapat memahami sudut akut, segitiga, persegi panjang, sudut tumpul, angka bujursangkar dan banyak hal lain yang relevan secara mendalam. Geometri ditemukan di mana-mana, dalam seni, arsitektur, teknik, olahraga, survei tanah, astronomi, ruang, alam, patung, mesin, robot, mobil dll, dan karena itu menjadi penting untuk memahami pendekatan dasar perlunya geometri dalam kehidupan nyata .

Geometri merupakan cabang penting dan tertua Matematika melibatkan studi luas, volume, lingkaran, segitiga dll Ada berbagai topik di geometri dan siswa diminta untuk belajar topik geometri sesuai standar akademis mereka. Beberapa topik dasar dalam Geometri adalah.

Materi pokok Geometri akan mempelajari tentang geometri. Materi pokok ini memuat materi tentang pengertian atau definisi dari geometri, lingkaran, ellips, dan transformasi geometri. Dalam pengertian geometri akan dijelaskan mengenai 1) titik, garis, bidang dan ruang, 2) hubungan titik, garis dan bidang dalam ruang, 3) jarak antara titik, garis dan bidang, baik berupa jarak titik dengan titik, jarak titik dengan garis, jarak garis dengan garis, jarak garis dengan bidang atau jarak bidang dengan bidang. Variasi sudut misalnya sudut antara garis dan bidang, dan sudut antara bidang dengan bidang. Dalam lingkaran akan diterangkan tentang definisi dari lingkaran, termasuk elemen-elemen dalam lingkaran misalnya titik pusat, jari-jari, diameter, tali busur, busur, keliling lingkaran, tembereng, juring dan cakram. Didalam mempelajari lingkaran tidak dibahas mengenai persamaan lingkaran, karena sudah dihasa dalam fungsi dan persamaan pada materi pokok pertama.

Dalam mempelajari geometri diperlukan ilmu dasar yang mendukung dalam pemahamannya. Penguasaan trigonomeri serta pemahaman tentang fungsi dan persamaan diperlukan untuk kelancaran dalam mempelajari materi pokok ini. Dalam mempelajari mata kuliah pengukuran banyak ditekankan pada pengetahuan tentang koordinat, baik menggunakan koordinat kutub atau koordinat kartesius, pengertin tentang sudut serta fungsi-fungsi trigonomerinya, serta perhitungan luas yang berdasarkan panjang/ jarak maupun luasan berdasarkan ketentuan yang lain baik berupa data hasil pengukuran maupun dari hsil perhitungan.

B. PENGERTIAN GEOMETRI

Kata **Geometri** berasal dari bahasa Yunani yaitu geo = bumi, metria = pengukuran, secara harafiah berarti pengukuran tentang bumi, adalah cabang dari matematika yang mempelajari hubungan di dalam ruang. Dari pengalaman, atau mungkin secara intuitif, orang dapat mengetahui ruang dari ciri dasarnya, yang diistilahkan sebagai aksioma dalam geometri.

Catatan paling awal mengenai geometri dapat ditelusuri hingga ke jaman Mesir kuno, peradaban Lembah Sungai Indus dan Babilonia. Peradaban-peradaban dari bangsa ini diketahui memiliki keahlian dalam drainase rawa, irigasi, pengendalian banjir dan pendirian bangunan-bagunan besar. Kebanyakan geometri pada jaman Mesir kuno dan Babilonia terbatas hanya pada perhitungan panjang segmen-segmen garis, luas, dan volume. Geometri merupakan cabang ilmu matematika mempunyai kegunaan yang penting dalam menunjang mata kuliah yang berhubungan dengan pengukuran. Geometri mempelajari pengetahuan tentang titik, garis, dan bidang dalam demensi satu, demensi dua dan demensi 3, beserta sudut, jarak, dan luasan tertentu.

1. Titik, Garis, Bidang, dan Ruang

Dalam membahas geometri pengertian garis, bidang dan ruang sangat lah penting. Yang dimaksudkan dengan garis adalah garis lurus yang merupakan himpunan titik-titik yang dihubungkan menjadi satu garis lurus. Bidang dalam pembahasan ini merupakan bidang datar yang merupakan himpunan garis-garis, dan yang dimaksudkan dengan ruang merupakan himpunan dari bidang-bidang.

Garis, bidang, dan ruang secara berturut-turut disebutkan sebagai ruang berdemensi 1, ruang berdemensi 2, dan ruang berdemensi 3, dan masing-masing ditandai dengan satu sumbu untuk ***garis,*** dua sumbu saling tegak lurus disebut *bidang datar*, dan tiga sumbu yang saling tegak lurus disebut sebagai ***ruang***.

Garis, bidang, dan ruang erat kaitannya dengan sistem koordinat kartesius. Satu titik pada garis ditentukan oleh satu komponen, bidang dikaitkan dengan dua komponen yaitu sumbu x dan y dengan koordinat (x, y), sedangkan ruang mengkaitkan tiga komponen yaitu sumbu x, sumbu y, dan sumbu z dengan koordinat (x. y, z).

a. Hubungan antara titik, garis dan bidang dalam ruang

1). Hubungan titik dengan garis dan bidang.

Diberikan titik A, garis g, dan bidang α, kemungkinan yang terjadi adalah :

$A \in g$ (A terletak pada g) atau $A \notin g$ (A terletak diluar g), dan

$A \in \alpha$ (A terletak pada α) atau $A \notin \alpha$ (A terletak diluar α)

2). Hubungan garis dengan garis

Diberikan garis g dan garis h didalam satu ruang, garis g dan h ditentukan paling sedikit oleh dua titik yang berlainan.

Hubungan antara g dan h kemungkinan akan terjadi adalah :

1. Garis g dan m berimpit, $g \cap h = g = h \neq 0$
2. Garis g dan m berpotongan, $g \cap h \neq P \neq 0$, P merupakan titik persekutuan
3. Garis g dan m sejajar, $g \cap h = 0$
4. Garis g dan m bersilangan, $g \cap h = 0$

3). Hubungan garis dengan bidang

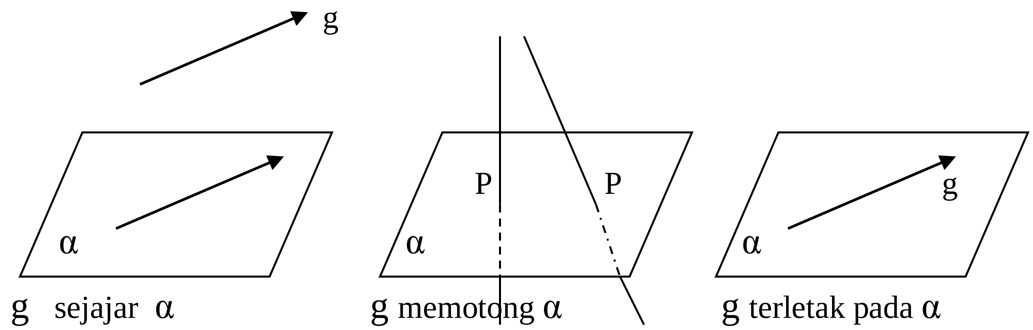
Diberikan garis g dan bidang α didalam suatu ruang, maka kemungkinan yang dapat terjadi adalah :

1. garis g sejajar dengan bidang α, $g \cap \alpha = 0$
2. garis g memotong bidang α, $g \cap \alpha = (P)$
3. garis g terletak pada bidang α, $g \cap \alpha = g$

ketentuan :

1. garis g dikatakan sejajar dengan bidang α bila garis sejajar dengan suatu garis yang terletak pada α , $g /\!/ \alpha \Leftrightarrow \exists\ h$ pada $\alpha \ni g /\!/ h$
2. garis g dikatakan tegak lurus terhadap bidang α bila garis g tegak lurus pada setiap garis yang terletak pada α. $g \perp \alpha \Leftrightarrow g \perp h$ pada α

3. Suatu bidang datar ditentukan oleh : 1) tiga buah titik yang tidak segaris, 2) satu buah titik dan satu buah garis yang tidak melalui titik tersebut, 3) dua buah garis yang berpotongan atau sejajar.



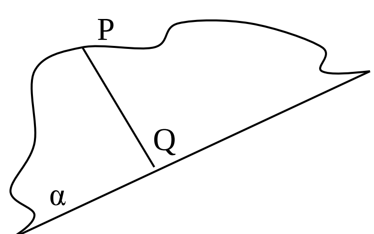
Gambar 1 Hubungan garis dengan bidang

2. Jarak Titik, Garis, dan Bidang

a. Jarak antara titik dengan garis

Diberikan titik P dan garis m, akan ditentukan jarak antara titik P dan garis g bila P$\notin$ m.

Melalui melalui titik P dan garis m dapat dibuat bidang α. Pada bidang α buatlah garis yang melalui P dan tegak lurus garis m sehingga memotong garis m dititik Q. Maka PQ merupakan jarak antara titik P dan garis l.



α = bidang (P, m)

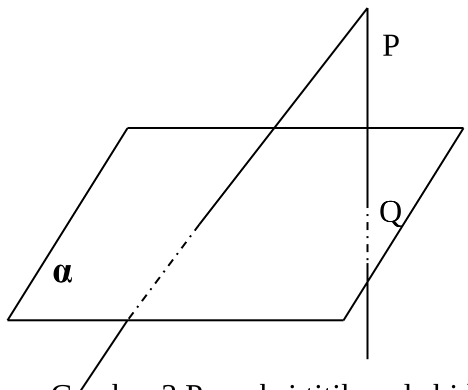
PQ = jarak (P, m)

Gambar 2 Jarak bidang

b. Jarak antara titik dengan bidang

Diberikan titik P dn bidng α, akan digunkan jarak antara titik P kebidang α bila P $\notin$ α.

Melalui titik P dapat dibuaat tak hingga banyaknya garis yang memotong bidang α, satu diantaranya akan memotong tegak lurus bidang α di Q. Garis PQ tegaak lurus bidang α, garis PQ tegak lurus bidaang α , garis PQ adalah jarak antara titik P kebidang α



Q = Proyeksi P pada α

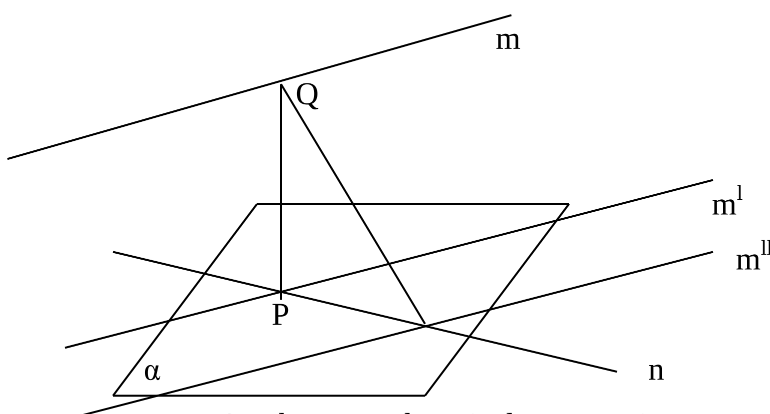
PQ ⊥ α

PQ = jarak (P, α)

Gambar 3 Proyeksi titik pada bidang

c. Jarak antara garis dan garis

Diberikan garis m dan garis n, akan ditentukan jarak antara garis m dan garis n. bila m memotong n, atau m berimpit dengan n maka jarak antara m dan n adalah nol.



Gambar 4 Jarak garis dengan garis

misalkan m bersilangan dengan n, maka akan dapat dibuaat tak hingga garis m^{l} yang sejajar dan memotong. Lalu buatlah bidang α yang dibentuk oleh garis-garis m^{l} dan n. Garis m akan sejajar dengan bidang α, karena m sejajaar dengan m^{l}, dengan m^{l} pada bidang α . Proyeksikan m pada bidang α maka akan terbentuk garis m^{ll} pada α sehingga akan berlaku bahwa m sejajar dengan m^{l} dan sejajar jugaa dengan m^{ll} seperti pada gambar diatas.

Melalui titik P dapat dibuat garis yang tegak lurus bidang α dan memotong m di Q. Garis PQ merupakan garis yang tegak lurus persekutuan dari garis m dan garis n. Garis PQ merupakan jarak dari garis m ke garis n.

d. Jarak antara garis dan bidang.

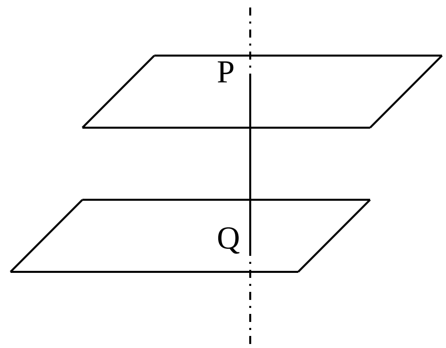
Pandang suatu garis m pada bidang α, akan dicari jarak antara garis m dan bidang α. Apabila garis m terletak pada bidang α, atau memotong bidang α, maka jaraknya akan sama dengan nol.

Apabila m sejajar dengan bidang α, maka proyeksi garis m pada bidang α, adalah suatu garis pada bidang α, namakan garis tersebut adalah garis m^{l}. Jarak antara garis m dan garis m^{l} merupakan jarak antara garis m tersebut dengan bidang α

Pada gambar diatas maka PQ merupakan jarak antara garis m dengan bidang α

e. Jarak antara bidang dengan bidang.

Pandanglah suatu bidang α dan bidang β dan akan ditentukan jarak antara bidaang α dan bidang β. Apabila bidang α dan bidang β berimpit atau berpotongan maka jarak antara bidang α dan bidang β adalah nol. Apabila kedua bidang tersebut sejajar, dan titik P pada bidang α dan titik Q pada bidang β, maka PQ merupkan jarak kedua bidang tersebut.



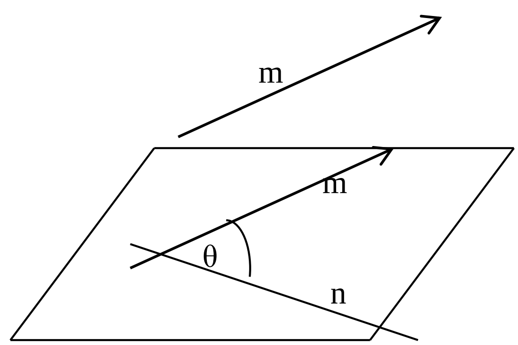
Gambar 5 Jarak Bidang dengan bidang

3. Sudut antara garis dan bidang

a. Sudut antara garis yang saling bersilangan

Pandang suatu garis m dan n, garis m dan n tersebut saling bersilangan, dan akan dicari sudut antara kedua garis yang bersilangan tersebut. Pertama buatlah garis m^1 yang sejajar m sehingga m^1 memotong n, kemudian buatlah bidang α yang melalui m^1 dan n. Sudut antara m^1 dan n, ditulis $\theta = \llcorner(m^1, n)$ adalah sudut antara garis m dan n ($0 \leq \theta \leq 90^0$)

`

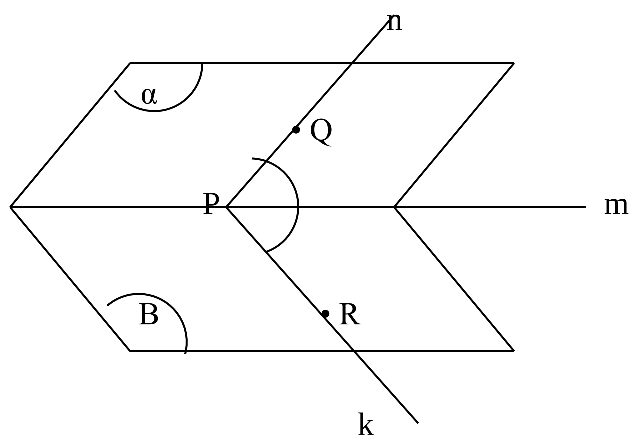


Gambar 6 Sudut antara garis dan garis

2. Sudut antara bidang dan bidang

Diberikan bidang α dan bidang β, akan ditentukan sudut antara bidang bidang α dan bidang β.

Bila bidang α sejajar atau berimpit dengan bidang β, maka sudut antara bidang α dan bidan β adalah nol, ditulis ∟(α, β) = 0. Bila bidang α memotong bidang β menurut garis m, pilihlah suatu titik P pada m. Melalui titik P dibuat garis n pada bidang α dan k pada bidang β yang masing-masing tegak lurus m. Pilih titik Q pada n dan titik R pada k. Maka ∟QPR = ∟(α, β). Sudut ini sering disebut sudut tumpuan bidang α dan bidang β.



Gambar 7 Sudut antara bidang dan bidang

C. BIDANG DATAR SEGI N

Bangun bidang datar adalah sebutan bagi bangun-bangun dua dimensi, seperti lingkaran, belah ketupat, layang-layang, trapesium, jajar genjang, segitiga, persegi panjang dan persegi. Masing-masing dari bangun tersebut mempunyai rumus untuk menghitung luas dan keliling yang berbeda satu dengan yang lain. Dalam pembelajaran Bidang datar segi N akan dipukuskan untuk mencari luasan dari bidang datar dimaksud.

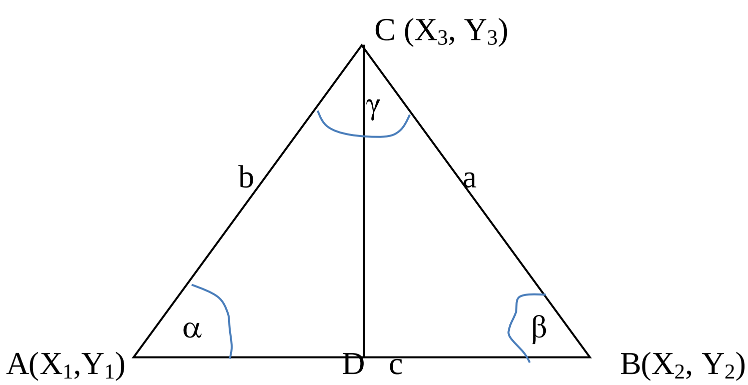
Perhitungan luas bidang datar akan diterangkan mengenai luas berdasarkan sisi, sudut, dan koordinatnya. Menggunakan rumus-rumus berdasarkan sisi, sisi dan sudut, maupun koordinat dari titik-titik pada bidang yang akan dicari luasannya. Dalam mempelajari modul ini penguasaan mengenai persamaan dan fungsi, dan grafik fungsi sangat diperlukan. Penguasaan pengetahuan tentang trigonometri dan siklometri, dan penguasaan sudut suatu bidang akan sangat membantu dalam menguasai pengetahuan tentang perhitungan luas bidang.

Diharapkan setelah mempelajari materi perhitungan luas bidang, mahasiswa mempunyai dasar yang kuat dalam mempelajari yang berhubungan dengan pengukuran antara lain ilmu ukur tanah, ilmu hitung perataan, kerangka dasar pemetaan, dan ilmu-ilmu lain yang sesuai.

1. Perhitungan Luas bidang datar segi n

Luas suatu daerah atau luas suatu bidang adalah luasan yang tertutup yang dibatasi dengan garis-garis yang berupa garis lurus yang diukur atau didapatkan dengan cara-cara tertentu, dan rumus tertentu. Luas suatu bidang ditentukan sesuai dengan cara pengukurannya dan ketelitian yang dikehendaki. Pengetahuan tentang luas daerah yang bentuknya sederhana harus dimengerti terlebih dahulu seperti luas yang berbentuk segitiga, segiempat, trapesium, lingkaran.

a. Luasan yang berbentuk segitiga;



Gambar 8 Segitiga

Segitiga ABC dengan sudut BAC = α, sudut ACB = γ, sudut ABC = β, dan sudut CDA = 90^0. Dan dengan sisi-sisi BC = a, AC = b, dan AB = c

Garis CD merupakan garis lurus dan tegak lurus pada garis AB.

Sisi – sisi a, b, dan c dapat ditentukan dengan hubungan sudut masing-masing.

Hubungan antara sisi dan sudut dari segitiga diatas apabila terdapat sisi atau sudut yang tidak diketahui dapat ditentukan dengan rumus Sinus dan Rumus Cosinur.

Rumus Sinus :

$$\frac{a}{\operatorname{Sin}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{Sin}\beta} = \frac{c}{\operatorname{Sin}\gamma}$$

Atau dengan rumus Cosinus :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2.bc. \operatorname{Cos}\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2.ac. \operatorname{Cos}\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2.ab. \operatorname{Cos}\gamma$

Apabila pada segitiga tersebut yang diketahui adalah koordinatnya, maka panjang sisi dapat diperoleh menggunakan :

Panjang sisi AB = $c = \sqrt{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)}$

Panjang sisi AC = $b = \sqrt{((x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2)}$

Panjang sisi BC = $a = \sqrt{((x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2)}$

Pada segitiga untuk mencari salah satu sisinya juga terdapat hubungan :

Luas segitiga tersebut diatas dapat dicari dengan cara :

a. Luas Δ ABC = ½ panjang alas x tinggi

= ½ AB x CD

Contoh 1 :

Jika segitiga ABC sama sisi, dengan panjang sisi a=b=c = 16 m, Pertanyaan : Tentukan luas ABC.

Jawab :

Panjang sisi AD = DB = ½ x 16 = 8 m

Panjang sisi CD = √(16^2 - 8^2) = 13,8 m

Luas Δ ABC = ½ .16.13,8 = **110,85 m^2**

Rumus mencari luassebuah segitiga apabila terdapat satu sisi yang tidak diketahui dan tidak terdapat sisi sudut yang berharga 90^0, harga luas tersebut dapat dicari menggunakan rumus :

1). Luas Δ ABC = ½ a.b Sin γ

2) Luas Δ ABC = ½ a.c Sin β

3) Luas Δ ABC = ½ b.c Sin α

Contoh 2 :

Jika segitiga ABC sama sisi, dengan panjang sisi a=b=c = 16 m,

Pertanyaan : Tentukan luas ABC.

Jawab :

Karena sama sisi maka sudutnya juga sama = 60^0

LuasΔABC = ½ 16.16. Sin 60^0 = 128. ½ √3 = 62 √3 = **110,85 m^2**

Apabila sisi-sisinya diketahui dan sudut-sudutnya tidak diketahui, harga luasan segitiga tersebut dapat dicari menggunakan rumus S. yaitu :

S = ½ (a + b + c)

L = $\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

Untuk a, b, c merupakan sisi-sisi yang diketahui dan L merupakan luas bidang yang akan dicari luasannya.

Contoh 3 :

Jika segitiga ABC sama sisi, dengan panjang sisi a=b=c = 16 m.

Peranyaan : Tentukan luas ABC.

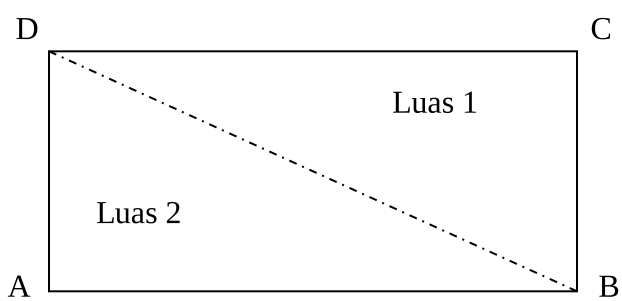
Jawab :

S = ½ (16 + 16 + 16) = ½ . 48 = 24

L Δ ABC = √ 24.3. (24 – 16) (24 – 16) (24 – 16)

= √ 24.8.8 8= √ 12288 = **110,85 m²**

b. Luasan yang berbentuk segi empat :



Gambar 9 Segi Empat

Luasan yang berbentuk segi empat dapat dicari menggunakan cara :

a. Apabila sudut-sudut dari segi empat tersebut siku-siku atau dengan sudut 90^0 maka luasnyua dapat ditentukan menggunakan Rumus :

Luas ABCD = Panjang x lebar

= AB x BC

Contoh 4 :

Jika terdapat segiempat siku-siku dimana panjang sisi AD = BC = 10 m dan AB = DC = 16 m.

Pertanyaan : Tentukan luas segi empat ABCD.

Jawab :

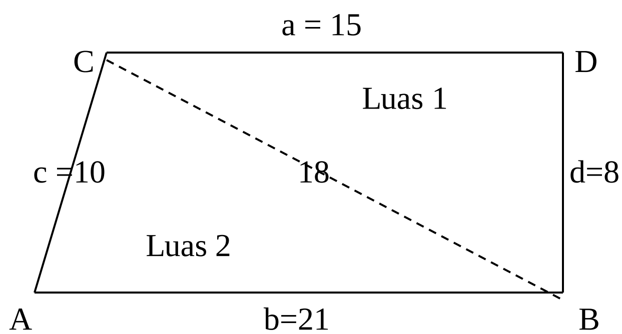
Luas ABCD = 10m x 16m = 160 m^2

Apabila sudutnya tidak harus 90^0, dapat mengguanakan :

Luas ABCD = Luas ∆ BAD + Luas ∆ BCD = Luas 1 + Luas 2

Panjang diagonal BD dapat dicari menggunakan cara mengukur langsung dari lapangan. Luas ∆ BAD dan Luas ∆ BCD dapat dicari menggunakan cara luas segitiga yang telah diterangkan didepan. Luas ∆ = $\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

4. **Luasan yang berbentuk trapesium:**



Gambar 10 Trapesium

Luasan yang berbentuk seperti trapesium diatas, luas daerahnya dapat dicari menggunakan rumus :

Luas ABCD = ½ (AB + CD) x BD = ½ (a + b) . d

Atau menggunakan rumus segitiga, Luas ∆ = $\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$, sehingga luas daerahnya : L ABCD = L ABC + L BCD = Luas 1 + Luas 2

Contoh 6 :

Jika trapezium ABCD, dengan panjang a = 15 m, b = 21 m, c = 10 m, dan d = 8 m, panjang diagonal BC = 18 m.

Pertanyaan **:**Tentukan luas bidang ABCD.

Jawab :

a. menggunakan rumus Luas = ½ (panjang 1 + panjang 2) x tinggi

Luas ABCD = ½ (a + b). d = ½ (15 + 21) m x 8 m = 18m x 8m = 144 m^2

b. menggunakan rumus segitiga

Luas ABCD = Luas ABC + Luas BDC

Luas ABC =

S_1 = ½ (21 + 10 + 17) = ½ (48) = 24 m

$L_1 = \sqrt{}$ (24 (24 – 21)(24 - 10)(24 – 17) = $\sqrt{}$ (24 x 3 x 14 x 7)

= $\sqrt{}$ 7056 = 84 m^2

S_2 = ½ (15 + 8 + 17) = ½ (40) = 20 m

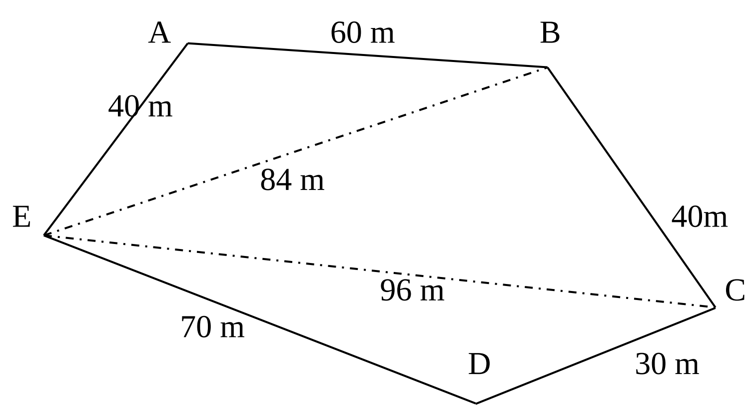
$L_2 = \sqrt{}$ (20 (20 – 15)(20 - 8)(20 – 17) = $\sqrt{}$ (20 x 5 x 12 x 3)

= $\sqrt{}$ 3600 = 60 m^2

LUAS = LUAS I + LUAS II

= 84 m^2 + 60 m^2 = 144 m^2

c. Luas berbentuk segi n



Gambar 11 Segi Lima

Pandang sustu bidang segi n. Luas bidang tanah tersebut adalah penjumlahan dari segitiga kecil sebanyak (n – 2) buah.

Luas bidang segi n = Luas Δ1 + Luas Δ2 + Luas Δ3 + …. + Luas Δ (n – 2).

Apabila sebagai contoh diambil luasan segi 5, luas luasan tersebut adalah :

Luas ABCDE = Luas Δ EBA + Luas Δ ECB + Luas Δ EDC

Contoh 7 :

Menurut hasil pengukuran dilapangan oleh juru ukur, Bidang tanah ABCDE mempunyai panjang sisi AB= 60 m, BC = 40 m, CD = 30 m, DE = 70 m, EA = 40 m, EB = 84 m, dan EC = 96 m.

Pertanyaan :

Tentukan luas bidang tanah ABCDE

Jawab :

Luas ABCDE = Luas Δ EBA + Luas Δ ECB + Luas Δ EDC

Luas Δ EBA =

$S_1 = ½ (84+ 60 + 40) = ½ (184) = 92$ m

$L_1 = \sqrt{} (92 (92 – 84)(92 - 60)(92 – 40) = \sqrt{} (92 \times 8 \times 32 \times 52)$

$= \sqrt{} 1224704 =$ **1106.663 m²**

Luas Δ ECB =

$S_2 = ½ (84+ 96 + 40) = ½ (220) = 110$ m

$L_2 = \sqrt{} (110 (110 – 84)(110 - 96)(110 – 40) = \sqrt{} (110 \times 26 \times 14 \times 70)$

$= \sqrt{} 2802800 =$ **1674.157 m²**

Luas Δ EDC =

$S_3 = ½ (96 + 70 + 40) = ½ (206) = 103$ m

$L_3 = \sqrt{} (103 (103 – 96)(103 - 70)(103 – 40) = \sqrt{} (103 \times 7 \times 33 \times 63)$

$= \sqrt{} 1498959 =$ **1224.32 m²**

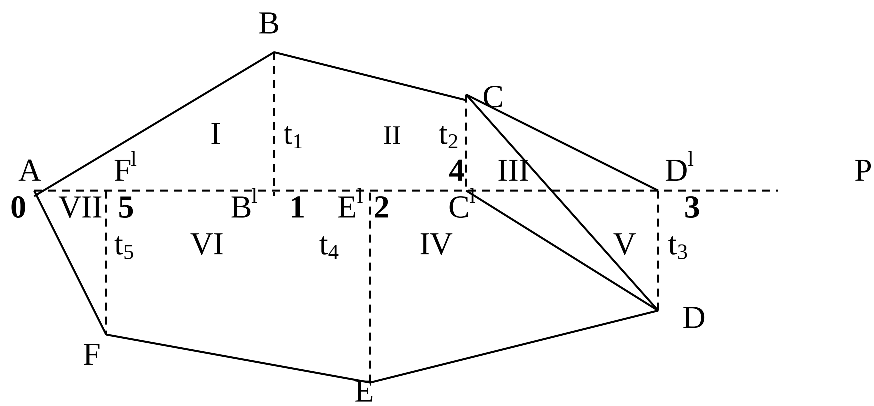
Luas ABCDE = Δ EBA + Luas Δ ECB + Luas Δ EDC

$= 1106.663\ m^2 + 1674.157\ m^2 + 1224.32\ m^2$

= 4005.14 m²

2. Penentuan Luas menggunakan Angka-Angka Jarak

Bila pengukuran daerah atau bidang dilakukan dengan maksud untuk mengetahui luasnya, maka derah tersebut hendaknya dibagi menjadi segitiga-segitiga dan trapesium, bentuk-bentuknya akan mudah dicari luasnya.



Gambar 12 Bidang Segi n

Perhitungan luas menggunakan panjang sisi-sisi, garis tegak lurus sebagai tinggi, dan dibagi dalam bentuk segitiga, kecil, trapesium dan segi empat akan memudahkan menemukan ukuran luasnya.

Bentuk-bentuk segitiga dan trapesium diperoleh dengan membuat suatu garis ukur. Garis ukur tersebut diubah sedemikian rupa, sehingga jarak-jarak dari titik kegaris ukur ini kecil, supaya mudah diukur. Untuk itu, sebagai garis ukur diambil garis lurus memotongmemanjang daerah yang akan ditentukan luasnya.

Sebagai contoh pandang luasan yang berbentuk segi enam ABCDEF, sesuai dengan Gambar 5 diatas.

Luasan segi enam ABCDEF, supaya tertutup dituliskan sebagai bidang ABCDEF.A.

Garis ukur AP. Semua titik batas diproyeksikan pada garis ukur AP, lalu diukur semua jarak titik-titik batas kegaris ukur AP yaitu : t_1, t_2, $t_{3,}$ t_4, dan t_5 dan jarak-jarak proyeksi batas yang terletak pada garis ukur, dihitung dari titik A

Sehingga $AB^l = \overline{01}$, $AC^l = \overline{02}$, $AD^l = \overline{03}$, $AE^l = \overline{04}$ $AF^l = \overline{05}$

Untuk menghindarkan koofisien 1/2 , maka luasnya dikalikan 2, sehingga rumus luas bidangnya adalah :

Luas ABCDEF.A = Luas Δ I + Luas ΔII + Luas ΔIII+ Luas trap IV-Luas Δ V+ Luas trap VI + Luas Δ VII

$$= t_1 . \overline{01} + (t_1 + t_2)\overline{12} + t_2 \overline{23} + (t_3 + t_4)\overline{34} - t_3 \overline{23} + (t_4 + t_5)\overline{45} + t_5 \overline{05}$$

Setelah disusun, ketiga suku dan suku ke lima dijadikan satu, dan diperoleh :

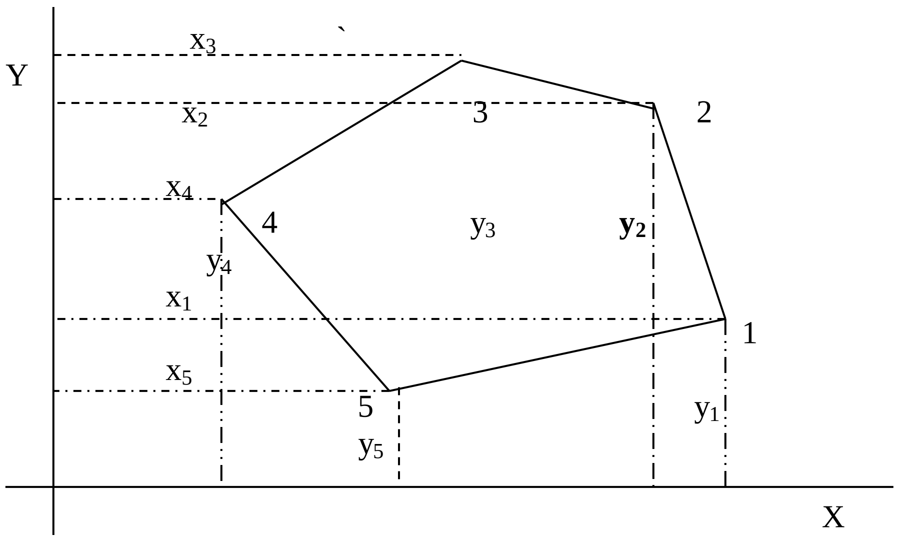
$$\text{Luas ABCDEF.A} = t_1 . \overline{01} + (t_1 + t_2)\overline{12} + (t_2 - t_3)\overline{23} + (t_3 + t_4)\overline{34} + (t_4 + t_5)\overline{45} + t_5 \overline{05}$$

Rumus ini adalah tersusun, jika suku pertama dan suku terakhir adalah $t_0 = 0$ dan $t_6 = t_0 = 0$, hingga untuk kedua suku dapat dapat ditulis seperti suku-suku lainnya, yaitu

Suku pertamanya adalah $(t_0 + t_1)\overline{01}$ dan suku bterakhirnya adalah $(t_0 + t_5)\overline{05}$.

3. Penentuan Luas Menggunakan Koordinat.

Untuk menghitung luas dengan angka-angka adalah dengan menggunakan koordinat kartesius titik batas daerah. Koordinat-koordinat titik batas ditentukan misalnya dengan mengukur batas bidang itu sebagai poligon yang diukur menggunakan teodolit dengan menggunakan suatu titik yang tertentu terhadap salip sumbu YOX yang tertentu pula.



Gambar 13 Menentukan Luasan dengan Koordinat

Misalkan garis batas daerah 1-2-3-4-5-1 telah diukur menggunakan theodolit sebagai poligon dan titik-titik batas dan diketahui koordinatnya, yaitu :

1(x_1, y_1), 2(x_2, y_2), 3(x_3, y_3), 4(x_4, y_4), dan 5(x_5, y_5)

Proyeksikan titik-titik batas pada sumbu X, maka akan mempunyai absis x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , dan x_5 , kesemuanya dihitung dari titik asal 0, maka akan diperoleh luas bidang segilima tersebut adalah :

2 Luas 12345.1 = Luas trapesiumI + Luas trapesium II + Luas Trapesium III - Luas Trapesium IV - Luas Trapesium V

$= (x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) - (x_5 - x_4)(y_5 + y_4) - (x_1 - x_5)(y_1 + y_5)$

Supaya ruas kana merupakan suatu jumlah, maka suku ke empat dan suku kelima yang mempunyai tanda minus (-) diganti suku-suku yang mempunyai tanda ples (+), sehingga runusnya menjadi :

2 Luas 12345.1 = $(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) +$
$(x_3 - x_4)(y_3 + y_4) + (x_4 - x_5)(y_5 + y_4) +$
$(x_5 - x_1)(y_1 + y_5)$

Supaya suku akhir tidak dilupakan, maka perlu nditulis untuk daerah 12345.1 dengan angka 1 ditulis ulang pada bagian belakang, dan supaya daerah tertutup, sehingga mempunyai luas :

$2\,L = \sum (x_n - x_{n+1})(y_n + y_{n+1})$

Sekarang proyeksikan pada daerah sumbu Y, maka akan diperoleh :

2 Luas 12345.1 = Luas trapesiumI + Luas trapesiumII + Luas TrapesiumIII - Luas Trapesium IV - Luas Trapesium V

= $(x_5 + x_1)(y_1 - y_5) + (x_1 + x_2)(y_2 - y_1) +$
$(x_2 + x_3)(y_3 - y_2) - (x_3 + x_4)(y_3 - y_4) -$
$(x_4 + x_5)(y_4 - y_5)$

Setelah suku-suku yang bertanda minus (-) diganti dengan suku-suku yang bertanda plus (+), maka diperoleh persamaan :

2 Luas 12345.1 = $(x_5 + x_1)(y_1 - y_5) + (x_1 + x_2)(y_2 - y_1) +$
$(x_2 + x_3)(y_3 - y_2) + (x_3 + x_4)(y_4 - y_5) +$
$(x_4 + x_5)(y_5 - y_4)$

Diperoleh rumus dengan bentuk umum :

(1) ……. $2\,L = \sum_{i=1}^{n} (x_n - x_{n+1})(y_n + y_{n+1})$ atau

(2) ……. $2\,L = \sum_{i=1}^{n} (y_{n+1} - y_n)(x_n + x_{n+1})$

Jika kedua rumus (1) dan (2) diatas ditinjau maka rumus yang pertama (1) yang diperoleh dengan memproyeksikan luas pada sumbu X, diperoleh sebagai factor pertama selisih absis sebagai faktor kedua adalah jumlah ordinat, dan merupakan penjumlahan dari perkalian selisih absis dengan jumlah ordinat.

Pada rumus kedua (2) yang diperoleh dengan memproyeksikan luas pada sumbu Y, diperoleh selisih ordinat sebagai faktor pertama dan jumlah absis pada faktor kedua, dan merupakan penjumlahan dari perkalian selisih ordinat dan jumlah absis..

Rumus-rumus (1) dan (2) seperti diatas akan diuraikan, maka rumus (1) diperoleh :

$$\begin{aligned} 2\text{ Luas} = {} & (x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_2) + (x_2y_2 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_3y_3) + \\ & (x_3y_3 + x_3y_4 - x_4y_3 - x_4y_4) + (x_4y_4 + x_4y_5 - x_5y_4 - x_5y_5) + \\ & (x_5y_5 + x_5y_1 - x_1y_5 - x_1y_1) \end{aligned}$$

Bila dicermati, suku-suku yang diperoleh dengan perbanyakan x dan y yang mempunyai indeks sama, antara lain : x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, dan x_5y_5, akan hilang maka akan diperoleh persamaan baru :

$$\begin{aligned} 2\text{ Luas} = {} & (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_4 - x_4y_3) + \\ & (x_4y_5 - x_5y_4) + (x_5y_1 - x_1y_5) \end{aligned}$$

Rumus diatas dapat ditulis dengan bentuk umum :

$$2\text{ L} = \sum_{i=1}^{n} (x_n \; y_{n+1} - x_{n+1}\, y_n)$$

Dengan menguraikan rumus (2) diperoleh :

$$\begin{aligned} 2\text{ Luas} = {} & (x_1y_2 - x_1y_1 + x_2y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_2y_2 + x_3y_3 - x_3y_2) + \\ & (x_3y_4 - x_3y_3 + x_4y_4 - x_4y_3) + (x_4y_5 - x_4y_4 + x_5y_5 - x_5y_4) + \\ & (x_5y_1 - x_5y_5 + x_1y_1 - x_1y_5) \end{aligned}$$

$$2\,\text{Luas} = (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_4 - x_4y_3) + (x_4y_5 - x_5y_4) + (x_5y_1 - x_1y_5)$$

$$2\,L = \sum_{i=1}^{n} (x_n\, y_{n+1} - x_{n+1}\, y_n)$$

Ternyata rumus yang diperoleh dengan menguraikan rumus (1) dan menguraikan rumus (2) hasilnya sama yaitu :

$$2\,L = \sum_{i=1}^{n} (x_n\, y_{n+1} - x_{n+1}\, y_n)$$

Untuk lebih mengerti tentang pengertian dan penggunaann rumus tadi perlu diberi kan contoh.

Tabel 1 Data Koordinat

titik	x	y	$x_n\, y_{n+1} - x_{n+1}\, y_n$
1	34.66	15.89	
2	10.14	28.37	(34.66)(28.37) – (10.14)(15.89) = 822.1796
3	-30.59	14.26	(10.14)(14.26) – (-30.59)(28.37) = 1012.435
4	-33.48	-18.01	(-30.59)(-18.01) – (-33.48)(14.26) = 1028.351
5	21.99	-22.72	(-33.48)((-22.72) – (21.99)(-18.01) = 1156.706
1	34.66	15.89	(21.99)(-15.89) – (34.66)(-22.72) = 1156.706

$$2\,L = \sum_{i=1}^{5} (x_n\, y_{n+1} - x_{n+1}\, y_n) =$$

= 822.1796 + 1012.435 + 1028.351 + 1156.706 + 1156.706

= 5156.567

Jadi Luas 12345.1 = ½ (5156.567) = **2578.283**

Tabel 2 Perhitungan Luas

titik	x	y	$x_n \; y_{n+1}$	$x_{n+1} \, y_n$	$x_n \; y_{n+1} - \; x_{n+1} \, y_n$
1	34.66	15.89			
2	10.14	28.37	983.3042	161.1246	822.1796
3	-30.59	14.26	144.5964	-867.838	1012.435
4	-33.48	-18.01	550.9259	-477.425	1028.351
5	21.99	-22.72	760.6656	-396.04	1156.706
6	34.66	15.89	349.4211	-787.475	1136.896
2 LUAS BIDANG 12345.1					5156.567
LUAS BIDANG 12345.1					**2578.283**

D. LINGKARAN

Sebuah lingkaran adalah himpunan semua titik pada bidang dalam jarak tertentu, yang disebut jari-jari, dari suatu titik tertentu, yang disebut pusat. Lingkaran adalah contoh dari kurva tertutup sederhana, membagi bidang menjadi bagian dalam dan bagian luar.

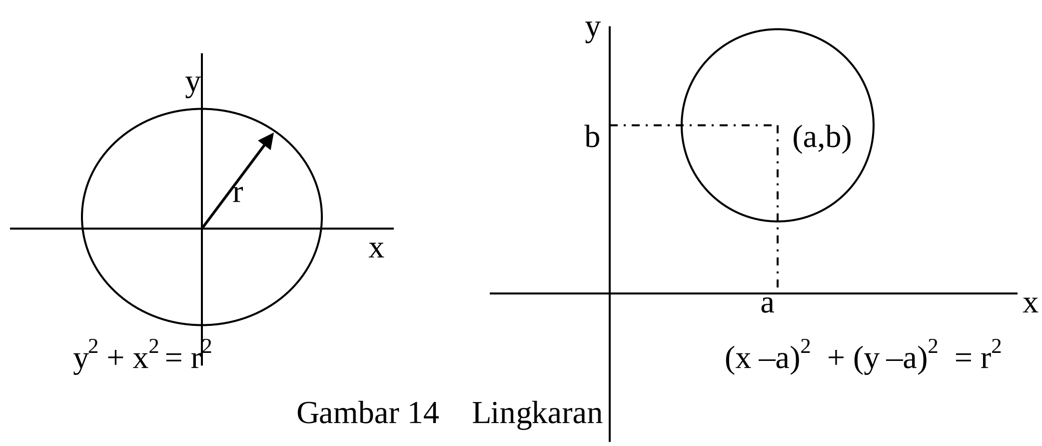
Elemen-elemen yang terdapat pada lingkaran, yaitu sbb:

Elemen lingkaran yang berupa titik, yaitu : **Titik pusat** (**P**) merupakan sebuah titik di dalam lingkaran yang menjadi acuan untuk menentukan jarak terhadap himpunan titik yang membangun lingkaran sehingga sama. Jarak antara titik pusat dengan lingkaran harganya konstan dan disebut jari-jari.

Elemen lingkaran yang berupa garisan, yaitu : 1) **Jari-jari** (**R**) merupakan garis lurus yang menghubungkan titik pusat dengan lingkaran.2). **Tali busur** merupakan garis lurus di dalam lingkaran yang memotong lingkaran pada dua titik yang berbeda. **Busur** merupakan garis lengkung baik terbuka, maupun tertutup yang berimpit dengan lingkaran. **Keliling lingkaran** merupakan busur terpanjang pada lingkaran. **Diameter** merupakan tali busur terbesar yang panjangnya adalah dua kali dari jari-jarinya. Diameter ini membagi lingkaran sama luas.

Elemen lingkaran yang berupa luasan, yaitu : 1) **Juring** merupakan daerah pada lingkaran yang dibatasi oleh busur dan dua buah jari-jari yang berada pada kedua ujungnya. 2). **Tembereng** merupakan daerah pada lingkaran yang dibatasi oleh sebuah busur dengan tali busurnya. 3) **Cakram** merupakan semua daerah yang berada di dalam lingkaran. Luasnya yaitu jari-jari kuadrat dikalikan dengan pi (Π). Cakram merupakan juring terbesar.

Lingkaran adalah suatu bentuk kurva yang tertutup yang merupakan himpunan dari titik-titik yang mempunyai jraak yang sama dari titik pusat. Jarak yang sama dari titik pusat (titik 0) tersebut dinamakan ***jari-jari*** (r). Sedangkan jarak titik pada suatu kurva dengan titik pada kurva lainnya yang melalui titik pusat dinamakan ***diameter***. lainnya pada Lingkaran jika dihubungkan dengan sistem koordinat kartesius berupa sumbu x dan y dengan persamaan $y^2 + x^2 = r^2$ atau $(x - a)^2 + (y - a)^2 = r^2$



Gambar 14 Lingkaran

secara umum persamaan lingkaran mempunyai persamaan :

$\mathbf{y^2 + x^2 + 2ax + 2by + c = 0}$

persamaan tersebut diatas mempunyai pusat di P (-a, -b) dan $r = \sqrt{(a^2 + b^2 - c)}$

dari persamaan lingkaran dapat diperluas hal-hal berupa :

1. $y^2 + x^2 + 2ax + 2by = 0$, merupakan persamaan lingkaran yang mempunyai pusat di P (-a, -b) dengan jari-jari $r = \sqrt{(a^2 + b^2)}$

2. $y^2 + x^2 + 2ax + c = 0$, merupakan persamaan lingkaran yang mempunyai pusat di P (-a, 0) dengan jari-jari $r = \sqrt{(a^2 - c)}$

3. $y^2 + x^2 + 2by + c = 0$, merupakan persamaan lingkaran yang mempunyai pusat di P (0, -b) dengan jari-jari $r = \sqrt{(b^2 - c)}$

1. Cara menentukan Pusat dan jari-jari lingkaran

Tentukan Pusat dan jari-jari lingkaran jika $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 14 = 0$

Pusat lingkarannya P (2b, 2a) → P (6/2 , -4/2) maka P (3, -2)

dengan jari-jari $\sqrt{(9 + 4 - (-14))} = \sqrt{27}$

Persamaan lingkaran diatas mempunyai Pusat di P (3, -2) dan jari-jari $r = \sqrt{27}$

2. Lingkaran sebagai tempat kedudukan

Perbandingaan jarak titik P (x, y) terhadap dua titik tetap yang diberikan tidak sama, maka kedudukan titik pusat tadi adalah suatu lingkaran

Diketahui suatu titik A (2, -3) dan B (-2, 4) tentukan tempat kedudukan titik P (x, y) sehingga terdapat hubungan $\overline{\mathbf{PA}} : \overline{\mathbf{PB}} = 1 : 2$ Persamaan tempat kedudukan dinyatakan sebagai

$\{ (x, y) \mid 3\ \overline{\mathbf{PA}} = \overline{\mathbf{PB}} \} \Leftrightarrow$

$\{ (x, y) \mid 9\overline{\mathbf{PA}}^2 = \overline{\mathbf{PB}}^2 \} \Leftrightarrow$

$\{ (x, y) \mid 4 [(2 - x)^2 + (-3 - y)^2] = (-2 - x)^2 + (4 - y)^2 \} \Leftrightarrow$

$\{ (x, y) \mid 4 [(4 - 4x + x^2) + (9 - 6y + y^2)] = (4 - 4x + x^2 + 16 - 8y + y^2) \}$

$\{ (x, y) \mid (16 - 16x + 4x^2 + 36 - 24y + 4y^2 = 4 - 4x + x^2 + 16 - 8y + y^2 \} \Leftrightarrow$

$\{ (x, y) \mid (25 - 16x + 4x^2 - 24y + 4y^2 = 20 - 4x + x^2 + 16 - 8y + y^2 \} \Leftrightarrow$

$\{ (x, y) \mid (3x^2 + 3y^2 - 12x - 16y + 5 = 0 \}$

Persamaan lingkaran sebagai tempat kedudukan lingkaran dengn persamaan

$3x^2 + 3y^2 - 12x - 16y + 5 = 0$

Lingkaran adalah suatu bentuk kurva yang tertutup yang merupakan himpunan dari titik-titik yang mempunyai jraak yang sama dari titik pusat. Jarak yang sama dari titik pusat (titik 0) tersebut dinamakan jari-jari (r). Sedangkan jarak titik pada suatu kurva dengan titik pada kurva lainnya yang melalui titik pusat dinamakan diameter. lainnya pada Lingkaran jika dihubungkan dengan sistem koordinat kartesius berupa sumbu x dan y dengan persamaan y2 + x2 = r2 atau (x –a)2 + (y –a)2 = r2 Elemen lingkaran yang berupa luasan, yaitu : 1). Juring merupakan daerah pada lingkaran yang dibatasi oleh busur dan dua buah jari-jari yang berada pada kedua ujungnya, 2) Tembereng merupakan daerah pada lingkaran yang dibatasi oleh sebuah busur dengan tali busurnya, 3). Cakram merupakan semua daerah yang berada di dalam lingkaran. Luasnya yaitu jari-jari kuadrat dikalikan dengan pi. Cakram merupakan juring terbesar. Keliling lingkaran merupakan busur terpanjang pada lingkaran

Keliling Lingkaran (K) = 2Π r, dimana r merupakan jari-jri dan Π merupakan besaran yang besarnya sama dengan 22/7 atau 3,14285

Pada prinsipnya Luas (L) lingkaran dapat dihitung dengan memotong motongnya sebagai elemen-elemen dari suatu juring untuk kemudian disusun ulang menjadi sebuah persegi panjang yang luasnya dapat dengan mudah dihitung.

Luas Lingkaran = L = Π r2

Contoh 8 :

Jika terdapat persamaan lingkaran x2 + y2 – 2x – 2y – 7 = 0

Pertanyaan : berapa luas kurva yang berbentuk lingkaran tersebut.

Jawab :

Jika terdapat persamaan lingkaran x2 + y2 – 2x – 2y – 7 = 0

Akan dibawa kebentuk (x –a)2 + (y –a)2 = r2

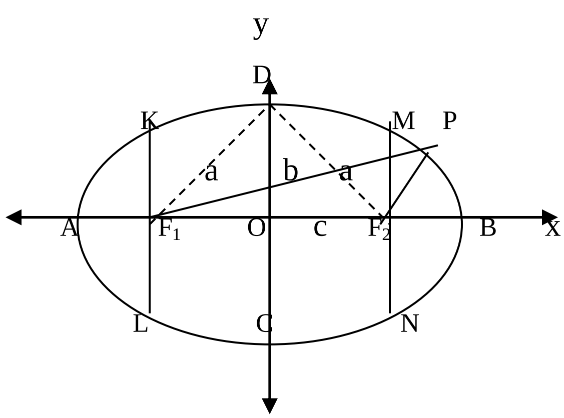
x2 -2x + 1 + y2 – 2y + 1 – 9 = 0

(x – 1)2 + (y – 1)2 = 9 jadi lingkaran dengan Pusat P(1, 1) dan jari-jari r = 3

Luas lingkaran (L) = 3,14285 (3)2 = 28,285 unit luasan

E. Ellips

Ellips merupakan suatu bangun yang merupakan himpunan titik- titik dengan ketentuan bahwa jumlah jarak setiap titik terhadap dua titik tertentu yang bukan merupakan anggota himpunan tersebut adalah tetap. Kedua titik tertentu tadi disebut sebagai titik focus yang didefinisikan sebagai F_1 dan F_2. Sedangkan jumlah jarak tetapnya adalah 2a (untuk a>0) dan jarak F_1 dan F_2 adalah $\overline{F_1F_2}$ = 2c



Titik P (x, y) merupakan titik sembarang pada ellips.

$F_1P + F_2P = 2a$

titik pusat ellips O (0,0)

titik focus ellips F_1 (-c, 0) dan F_2 (c, 0)

titik A (-a, 0) dan B (a, 0)

titik D (0, b) dan C (0, -b)

Gambar 15 Ellips

Sumbu mayor adalah sumbu yang melalui tiik F_1 dan F_2 yang mempunyai panjang |AB| = 2a, sedangkan sumbu minor adalah sumbu yang melalui titik pusat dan tegak lurus terhadap sumbu mayor sepanjang |CD| = 2b.

Sumbu utama disebut juga ***transvers axis*** merupakan sumbu simetri yang melalui F_1 dan F_2 adalah sumbu X

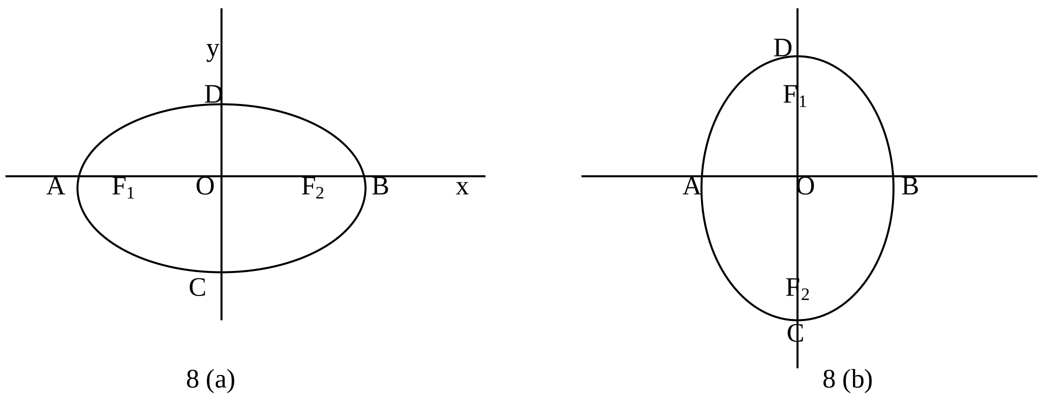
Sumbu sekawan disebut juga ***conjugate axis*** merupakan sumbu simetri yang merupakan garis sumbu $F_1 F_2$

Titik A (-a, 0) dan B (a, 0) merupakan titik potong ellips dengan sumbu mayor, dan

Titik D (0, b) dan C (0, -b) merupakan titik potong ellips dengan sumbu minor

Garis KL dan NM merupakan ***Latus rectum*** berbentuk garis fertikal yang melalui F_1 dan F_2 dan tegak lurus sumbu mayor dan memotong ellips dititik K, L, M, dan N. Panjang Latus rectum KL dan MN = $(2b^2) / a$ dan koordinat titik-titik ujung Latus rectum adalah: K $(-c, -b^2/a)$, L $(-c, b^2/a)$, M $((c, b^2/a)$ dan N $(c, -b^2/a)$

Δ DOF_2 merupakan segitig siku-siku dititik O dan berlaku $a^2 = b^2 + c^2$



Gambar 16 Sumbu utama dan Sumbu sekawan Ellips

a. Persamaan Ellips melalui sumbu pusat dan berpusat O (0, 0) apabila seperti terlukis pada gambar 8(a) adalah :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{atau} \quad b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

dengan sumbu utama adalah sumbu X

b. Persamaan Ellips melalui sumbu pusat dan berpusat O (0, 0) apabila seperti terlukis pada gambar 8(b) adalah :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \text{ atau } a^2 x^2 + b^2 y^2 = a^2 b^2,$$

dengan sumbu utama adalah sumbu Y

c. Persamaan Ellips berpusat di titik P (p, q) dan bentuknya seperti gambar 8(a) adalah :

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1, \text{ atau } b^2 (x-p)^2 + a^2 (y-q)^2 = a^2 b^2,$$

dengan sumbu utamanya adalah y = q

c. Persamaan Ellips berpusat di titik P (p, q) dan bentuknya seperti gambar 8(b) adalah :

$$\frac{(x-p)^2}{b^2} + \frac{(y-q)^2}{a^2} = 1, \text{ atau } a^2 (x-p)^2 + b^2 (y-q)^2 = a^2 b^2,$$

dengan sumbu utamanya adalah x = p

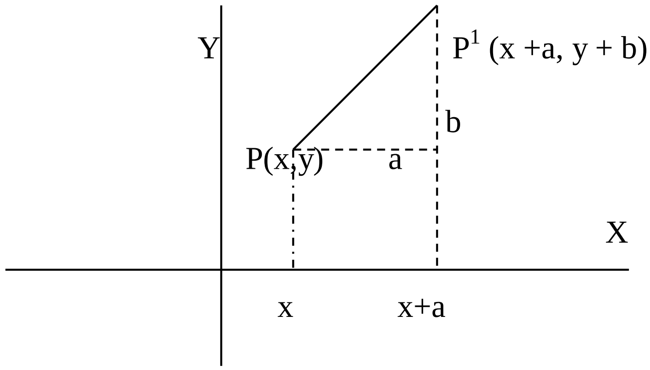
F. TRANSFORMASI GEOMETRI

Transformasi Geometri adalah suatu pemetaan titik (x, y) menjadi (x^1, y^1) pada bidang yang sama, pemetaan tersebut ditulis T : (x, y) $\rightarrow$ (x^1, y^1).
Pemetaan Geometri terdiri dari :

1. Jenis- jenis Transformasi Geometri

a. **Transformasi Translasi** atau pergeseran. Transformasi ini adalah pemindahan suatu objek sepanjang garis lurus dengan arah dan jarak tertentu.

   Jika translasi T = $\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$ memetkan titik P (x, y) ketitik P^1 (x^1, y^1), maka x^1=x+a, dan y^1=y + b, atau P^1 (x+a, y+b)



Gambar 17   Transformasi Translasi

b. **Transformasi Refleksi** atau pencerminan. Merupakan transformasi yang memindahkan setiap titik pada bidang dengan menggunakan sifa bayangan cermin dari-titik-titik yang hendak dipindahkan.

Pada suatu transformasi refleksi, segmen garis yang menghubungkn setiap dengan hasil refleksi akan terbagi 2 dan tegak lurus pada sumbu refleksinya.

c. **Transformasi Rotasi** atau perputaran.Rotasi pada bidang geometri ditentukan oleh titik pusat, besar sudut, dan arah sudut rotasi. Suatu rotasi dikatakan mempunyai arah positif jika rotasinya berlawanan arah dengan arah perputaran jarum jam. Dan rotasi dikatakan negative apabila rotasi searah dengan perputaran arah jarum jam.

d. **Transformasi Dilatasi** atau perbesaran atau perkalian. Dilatasi merupakan jenis transformasi geometri yang mengubah ukuran (memperbesar atau memperkecil) ukuran suatu bangun, tetapi tidak merubah bentuk bangun yang bersangkutan. Dilatasi ditentukn oleh titik pusat dan factor dilatasi. Dilatasi yang berpusat dititik (0,0) dan titik sembarang P(x, y) dengan masing-masing factor skala k akan dilambangkan berturut-turut sebagai [0, k], dan [P, k]

2. Matrik Tranformasi Geometri

a. Matrik Transformasi Pencerminan

Tabel 1 Matrik Transformasi Refleksi

No	Transformasi Refleksi	Hasil Pemetaan	Jenis Matrik
1	Pencerminan terhadap sumbu x	(x,y) → (x, -y)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
2	Pencerminan terhadap sumbu y	(x,y) → (- x, y)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3	Pencerminan terhadap sumbu y= x	(x,y) → (y, x)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
4	Pencerminan terhadap sumbu y= - x	(x,y) → (-y, -x)	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
5	Pencerminan terhadap sumbu y = -x	(x,y) → (-x, -y)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b. Matrik Transformasi Dilatasi

1). Titik P (x, y) akan dipetakan menjadi P^1 (x^1, y^1) oleh perbesaran [0, k]

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2). Titik P (x, y) akan dipetakan menjadi P^1 (x^1, y^1) oleh perbesaran [A, k] dengan pusat A (a, b)

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

c. Matrik Transformasi Rotasi

Tabel 2 Matrik Transformasi Rotasi

No	Transformasi Rotasi	Hasil Pemetaan	Jenis Matrik
1	Rotasi terhadap titik asal O (0, 0) sebesar 90^0	$(x,y) \rightarrow (-y, x)$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2	Rotasi terhadap titik asal O (0, 0) sebesar -90^0	$(x,y) \rightarrow (-y, -x)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
3	Rotasi terhadap titik asal O (0, 0) sebesar 180^0	$(x,y) \rightarrow (-x, -y)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
4	Rotasi terhadap titik asal O (0, 0) sebesar α	$(x,y) \rightarrow (x^1, y^1)$	$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

RANGKUMAN

1. Garis dalam hal ini adalah garis lurus yang merupakan himpunan titik-titik yang dihubungkan menjadi satu garis lurus.

2. Bidang dalam pembahasan ini merupakan bidang datar yang merupakan himpunan garis-garis.

3. Ruang merupakan himpunan dari bidang-bidang.

4. Jarak titik dengan garis. Melalui melalui titik P dan garis m dapat dibuat bidang α. Pada bidang α buatlah garis yang melalui P dan tegak lurus garis m sehingga memotong garis m dititik Q. Maka PQ merupakan jarak antara titik P dan garis l.

5. Jarak garis dengan garis. Melalui titik P dapat dibuat garis yang tegak lurus bidang α dan memotong m di Q. Garis PQ merupakan garis yang tegak lurus persekutuan dari garis m dan garis n. Garis PQ merupakan jarak dari garis m ke garis n.

6. Jarak garis dengan bidang merupakan jarak garis dengan garis yang sejajar pada bidang lain. Jika garis m pada bidang α dan garis n pada bidang β, maka jarak dari m pada bidang α ke bidang β merupakan jarak garis ke bidang.

7. Jarak bidang ke bidang. Apabila bidang α dan bidang β merupakan bidang yang sejajar dan m pada bidang α dan n pada bidang bidang β, maka jarak m ke n merupakan jarak bidang α ke bidang β.

8. a. Persamaan lingkaran secara umum $y^2 + x^2 + 2ax + 2by = 0$, merupakan lingkaran dengan pusat P (-a, -b), dengan jari-jari $r = \sqrt{(a^2 + b^2)}$

b. Persamaan lingkaran secara umum $y^2 + x^2 + 2ax + c = 0$, merupakan lingkaran dengan pusat P (-a, 0), dengan jari-jari $r = \sqrt{(a^2 + c)}$

c. Persamaan lingkaran secara umum $y^2 + x^2 + 2by + c = 0$, merupakan persamaan lingkaran yang mempunyai pusat di P (0, -b) dengan jari-jari $r = \sqrt{(b^2 + c)}$

9. . a. Persamaan Ellips melalui sumbu pusat dan berpusat O (0, 0) adalah :
$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$, dengan sumbu utama adalah sumbu X

b. Persamaan Ellips melalui sumbu pusat dan berpusat O (0, 0) adalah :
$a^2 x^2 + b^2 y^2 = a^2 b^2$, dengan sumbu utama adalah sumbu Y

c. Persamaan Ellips berpusat di titik P (p, q) adalah :
$b^2 (x – p)^2 + a^2 (y – q)^2 = a^2 b^2$, dengan sumbu utamanya adalah y = q

d. Persamaan Ellips berpusat di titik P (p, q) adalah :
$a^2 (x – p)^2 + b^2 (y – q)^2 = a^2 b^2$, dengan sumbu utamanya adalah x = p

Latihan

1. Dalam Kubus ABCD.EFGH, dengan pnjang rusuk 6 m . Tentukanlah jarak Titik B ke bidang ACF :
2. Kubus ABCD.EFGH seperti pada no 1. Tentukan panjang diagonal ruang BH
3. Kubus ABCD.EFGH seperti pada no 1. Tentukan jarak antara garis AF dan garis CH
4. Kubus ABCD.EFGH seperti pada no 1. Tentukan sudut antara BDG dan BDHF.

5. Kubus ABCD.EFGH seperti pada no 1. Tentukan jarak antara bidang AFH dan bidang BDG

6. Tentukan titik pusat dan jari jari lingkaran, dengan persamaan :

$y^2 + x^2 + 4x - 6y = 0$

7. Tentukan titik pusat dan jari jari lingkaran, dengan persamaan :

$y^2 + x^2 + 10y - 11 = 0$

8. Tentukan bayangan titik-titik A (-5, 4) dan B (2, -6) oleh translasi T = $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

9. Tentukan bayangan titik P (3, -6) juka dicerminkan terhadap garis y = - x

10. Segitiga ABC, dengan titik-titik A (-2, 2), B (4, 6) dan C (5, -1), akan diputar sebesar 60^0, dari titik asal O (0, 0). Tentukan koordinat segitiga yang baru :

TEST FORMATIF

1. Dalam Kubus ABCD.EFGH, dengan panjang rusuk a satuan. . Tentukanlah jarak Titik B ke bidang ACF :

   a. $a\sqrt{3}$ b. $1/3a\sqrt{3}$

   c. $a\sqrt{2}$ d. $½ a\sqrt{2}$

2. Kubus ABCD.EFGH seperti pada no 1. Tentukan sudut antara garis AF dan garis BH

   a. 90^0 b. 30^0

   c. 60^0 d. 45^0

3. Kubus ABCD.EFGH seperti pada no 1. Tentukan jarak antara garis AF dan garis BH.

   a. $1/6\ a\sqrt{3}$ b. $1/6\ a\sqrt{6}$

   c. $1/3\ a\sqrt{6}$ d. $a\sqrt{6}$

4. Kubus ABCD.EFGH seperti pada no 1. Tentukan sudut antara BDE dan BDHF.

a. 90^0 b. 30^0

c. 60^0 d. 45^0

5. Kubus ABCD.EFGH seperti pada no 1. Tentukan jarak antara bidang AFH dan bidang BDG

a. $1/6\ a\sqrt{3}$ b. $1/6\ a\sqrt{6}$

c. $1/3\ a\sqrt{3}$ d. $1/3\ a\sqrt{6}$

6. Tentukan titik pusat dan jari jari lingkaran, dengan persamaan :

$y^2 + x^2 - 4x + 8y = 0$

a. P(2, -4) dan $\sqrt{20}$ b. P(- 2, 4) dan $\sqrt{20}$

c. P(2, 4) dan $\sqrt{20}$ d. P(- 2, -4) dan $\sqrt{20}$

7. Tentukan titik pusat dan jari jari lingkaran, dengan persamaan :

$y^2 + x^2 - 20x + 6 = 0$

a. P(10, 0) dan $\sqrt{364}$ b. P(-10, 0) dan 8

c. P(-10, 4) dan $\sqrt{364}$ d. P(10, -4) dan 8

8. Tentukan bayangan titik-titik A (4, 4) dan B (2, -4) oleh translasi T = $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

a. A^1 (7, 9) dan . B^1 (5, 2) b. A^1 (-7, -9) dan . B^1 (-2, -5)

c. A^1 (7, 9) dan . B^1 (-2, 5) d. A^1 (7, -9) dan . B^1 (5, -2)

9. Tentukan bayangan titik P (5, 6) juka dicerminkan terhadap garis y = x

a. P^1 (5, -6) b. P^1 (-6, -5)

c. P^1 (-5, 6) d. P^1 (6, 5)

10. Segitiga ABC, dengan titik-titik A (2, 2), B (4, 5) dan C (6, -1), akan diputar sebesar 90^0, dari titik asal O (0, 0). Tentukan koordinat segitida yang baru :

a. A^1 (2, -2), B^1 (-5, 4), dan C^1 (1, -6)

b. A^1 (-2, -2), B^1 (-5, 4), dan C^1 (-1, 6)

c. A^1 (-2, 2), B^1 (-5, 4), dan C^1 (1, 6)

d. A^1 (2, 2), B^1 (-5, 4), dan C^1 (1, 6)

Saudara kerjakan Tes Formatif tersebut diatas. Apabila saudara telah selesai mengerjakan, untuk mengetahui hasil yang anda capai. Cocokkan jawaban saudara dengan kunci jawaban test formatif 6 yang terdapat pada bagian akhir Modul ini. Hitunglah jawaban saudara yang benar. Kemuadian gunakan rumus dibawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Saudara terhadap materi Modul ini.

Rumus :

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban saudara yang benar}}{10} \times 100\ \%$$

Arti tingkat penguasaan yang saudara peroleh adalah :

80 – 100 % = Baik Sekali

70 – 79 % = Baik

60 – 69 % = Cukup

< 60 % = Kurang

Bila saudara memperoleh tingkat penguasaan 70 % atau lebih saudara dapat melanjutkan ke Modul berikutnya. Sedangkan jika tingkat penguasaan Saudara dibawah 70% saudara wajib mengulangi Modul ini, terutama pada bagian yang belum saudara kuasai.

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, Frank. 1981. *Teory and Problem of Calkulus*. : McGraw-Hill, Singapore.

Anton.1992. *Aljabar Linier Elementer*. Erlangga, Jakarta.

Bartle, Robert Gardner. 1927. *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons, Inc. USA.

Budi, Wono Setyo. 1995. *Aljabar Linier*. Gramedia. Jakarta.

Hendrawan, Andi. 2001. *Hitung Deferensial*. Debut Press. Yogyakarta.

Howard, Hutahaean. 1983. *Kalkulus Deferensial dan Integral*. Gramedia. Jakarta.

Keedy & Bittinger. 1986. Algebra and Trigonometry. Addison Wesley Publising Company. California

Leitold, Louis. 1987. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitis*. Bina Aksara. Jakarta.

Nasution, Andi Hakim. 1971. *Landasan Matematika*. Bhatara. Jakarta

Rawuh, *Matematika Pendahuluan*, Penerbit ITB. Bandung

Seputro, Theresia, 1989. *Pengantar Dasar Matematika*. Depdikbud. Jakarta.

Soepranto, J. 1979. *Pengantar Matrik*. Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi UI. Jakarta.

Wongso Sutjitro, Sutomo. 1974. *Ilmu Ukur Tanah*. Swada. Bandung.