MODUL I TRIGONOMETRI

A. PENDAHULUAN.

Tujuan dari pembelajaran Trigonometri adalah mampu menguasai konsep konsep dasar Trigonometri dan dapat menerapkan dalam perhitungan perhitungan yang berhubungan dengan pengukuran, antara lain ukur tanah, hitung perataan, dan perhitungan lain yang berhubungan dengan pertanahan. Buku materi pokok Trigonometri yang menjelaskan tentang trigonomeri juga diberikan materi tentang fungsi siklometri yang merupakan fungsi invers dari fungsi trigonometri. Fungsi trigonometri dan fungsi siklometri mempunyai hubungan yang tak terpisahkan dan saling mendukung. Materi pokok Trigonometri dibahas tentang pengertian trigonometri, yang merupakan hubungan antara sudut dan ruas garis yang mengapitnya. Fungsi siklometri berkaitan erat dengan fungsi trigonometri. Dalam mempelajari trigonometri akan ditemukan harga besaran dalam bentuk harga desimal, sedangkan fungsi siklometri dalam perhitungannya akan ditemukan harga sudutnya.
Materi ini sangat diperlukan dalam mendukung mata kuliah tentang ilmu ukur tanah dalam kaitannya dengan perhitungan luas dan letak suatu posisi.

Dalam mempelajari trigonometri mahasiswa terlebih dahulu harus dapat menguasai aritmatika dan aljabar yang membahas tentang fungsi dan persamaan. Tanpa pengetahuan yang cukup tentang aritmatika dan aljabar, mahasiswa akan kesulitan dalam memahami materi pokok trigonometri. Setelah mempelajari materi dalam modul 2 ini diharapkan : 1) mahasiswa dapat menjelaskan tentang definisi sinus, cosinus, tangent, cosecant, secan, dan cotangen, 2) mahasiswa dapat menghitung perhitungan sudut dan persamaan dalam trigonometri, dan 3) mahasiswa dapat menggambarkan grafik fungsi trigonometri dengan baik dan benar..

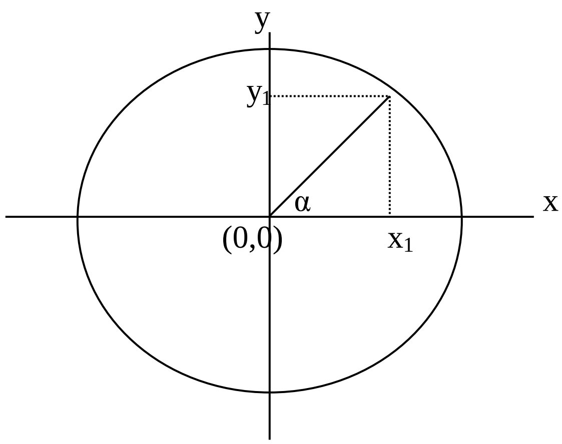
B. PENGERTIAN TRIGONOMETRI

Trigonometri berasal dari bahasa Yunani yaitu *trigonon* yang berarti *tiga sudut* dan *metro* yang berarti *mengukur* merupakan sebuah cabang matematika yang berhadapan dengan sudut segi tiga dan fungsi trigonometrik seperti sinus, cosinus, dan tangen. Trigonometri memiliki hubungan dengan geometri, meskipun ada ketidaksetujuan tentang apa hubungannya; bagi beberapa orang, trigonometri adalah bagian dari geometri.

Awal trigonometri dapat dilacak hingga zaman Mesir Kuno dan Babilonia dan peradaban Lembah Indus, lebih dari 3000 tahun yang lalu. Matematikawan India adalah perintis penghitungan variabel aljabar yang digunakan untuk menghitung astronomi dan juga trigonometri. Lagadha adalah matematikawan yang dikenal sampai sekarang yang menggunakan geometri dan trigonometri untuk penghitungan astronomi dalam bukunya Vedanga, Jyotisha, yang sebagian besar hasil kerjanya hancur oleh penjajah India. Matematikawan Yunani Hipparchus sekitar 150 SM menyusun tabel trigonometri untuk menyelesaikan segi tiga. Matematikawan Yunani lainnya, Ptolemy sekitar tahun 100 mengembangkan penghitungan trigonometri lebih lanjut. Matematikawan Silesia Bartholemaeus Pitiskus menerbitkan sebuah karya yang berpengaruh tentang trigonometri pada 1595 dan memperkenalkan kata ini ke dalam bahasa Inggris dan Perancis. Ada banyak aplikasi trigonometri. Terutama adalah teknik triangulasi yang digunakan dalam astronomi untuk menghitung jarak ke bintang-bintang terdekat, dalam geografi untuk menghitung antara titik tertentu, dan dalam sistem navigasi satelit.

Diatas telah diterangkan bahwa trigonometri adalah cabang ilmu matematika yang mempelajari hubungan antara sudut pada suatu bidang atau ruang. Sudut dibentuk dari dua garis lurus yang sudah terdefinisi terlebih dahulu. Garis tersebut antar lain garis pada sumbu x, garis pada sunbu y, garis miring, atau garis-garis lain yang mempunyai hubungan antar garis.

Misalkan terdapat suatu lingkaran, pada lingkaran tersebut terdapat garis sumbu x dan garis sumbu y. Dalam lingkaran tersebut terdapat tiga ruas garis, ruas garis sepanjang x dari titik pusat ke x_1, ruas garis sepanjang y dari titik pusat ke y_1, dan ruas garis yang merupakan jari-jari lingkaran, dan sudut yang mengapit sumbu x dan jari-jari yang disebut sebagai sudut



Gambar 1 Hubungan Lingkaran, Sudut , dan jari-jari

Sinus α didefinisikan sebagai panjang ruas garis didepan sudut α (y) dibagi dengan sisi miringnya atau Sinus $\alpha = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{r}}$, Cosinus α didefinisikan sebagai panjang ruas garis sisi mendatar (x) dibagi dengan sisi miringnya atau Cosinus $\alpha = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{r}}$, dan sedangkan Tangen α didefinisikan sebagai panjang ruas garis didepan sudut α (y) dibagi dengan panjang ruas garis mendatar (x) atau Tangen $\alpha = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{r}}$ atau tg α = sin α / cos α.

Disamping dalam bentuk derajat, satuan sudut dalam trigonometri dikenl satuan sudut dalam bentuk radial disingkat rad. 1 radial ditulis 1 rad, merupakan besar sudut pusat lingkarandengan jari-jari r dan busur r juga.

Besar 1 Π rad = 180^0, besar harga Π = 22/7 = 3,4159

Jika dalam membahas trigonometri harga sudut tidak ditulis berarti harga tersebut dalam radial.

Dalam trigonometri dikenal pengertian tentang kwadran. kwadran merupakan pengelompokan interval sudut dari 0^0 sampai 360^0. interval antara 0^0 sampai kurang dari 90^0 disebut kwadran I, interval antara 90^0 sampai kurang dari 180^0 disebut kwadran II, interval antara 180^0 sampai kurang dari 270^0 disebut kwadran III sedangkan interval antara 270^0 sampai kurang dari 360^0 disebut kwadran IV. Pada definisi kwadran harga 0^0, 90^0, 270^0, dan360^0, tidak termasuk kwadran I,II,III, atau IV. Karena pada sudut tersebut mempunyai harga 0, ~, atau - ~.

Harga positif atau negative dari sinus, cosinus dan tangen seperti terlihat pada table dibawah :

Tabel 1 Tabel Kwadran

	Sinus α	Cosinus α	Tangen α
Kwadran I	+	+	+
Kwadran II	+	-	-
Kwadran III	-	-	+
Kwadran IV	-	+	-

Disamping harga sinus, cosinus dan tangent dikenal juga harga-harga Cosecan atau disebut juga Cosec, Secan disebut juga Sec, dan Cotangen disebut Ctg. Harga Cosec α didefinisikan sebagai :

$$\text{Cosec } \alpha = 1/\sin \alpha = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{y}}$$

$$\text{Sec } \alpha = 1/\cos \alpha = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{x}}$$

$$\text{Ctg } \alpha = 1/\text{tg } \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}$$

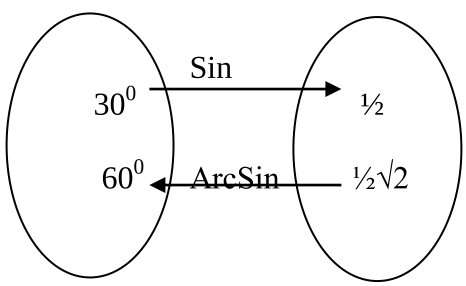
Harga positif atau negative Cosecan, Secan, dan Cotangen pada sudut-sudutnya terlihat seperti pada tabel dibawah ini :

Tabel 2 Tabel Kwadran

	Cosec α	Sec α	Ctg α
Kwadran I	+	+	+
Kwadran II	+	-	-
Kwadran III	-	-	+
Kwadran IV	-	+	-

Harga positif dan negatif suatu fungsi hiperbolik sama dengan fungsi trigonometrinya.

Fungsi trigonometri mempunyai fungsi inversnya. Fungsi invers trigonometri disebut sebagai fungsi siklometri dalam benuk arces. Misalnya invers dari sin α = arcsin α, invers dari cos α = arccos α, dan invers dari tg α = arctg α



$\text{Sin } 30^0 = \tfrac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \text{Arcsin } \tfrac{1}{2} = 30^0$

$\text{Arcsin } \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 60 \rightarrow \text{ Sin } 60 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$

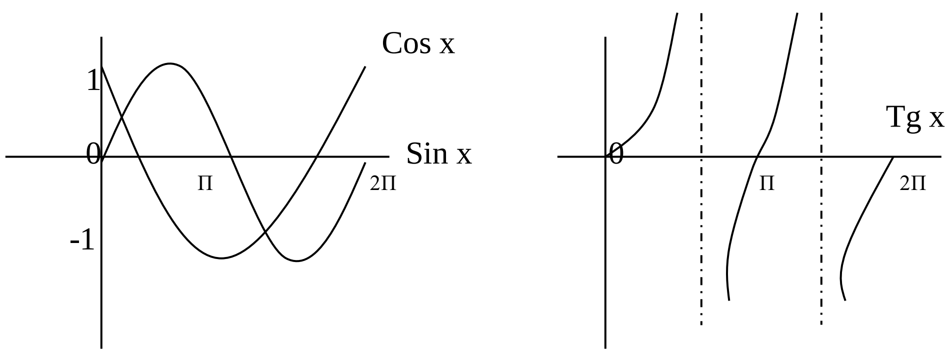
Gambar 2 Hubungan Trigonometri dan Siklometri

Harga-harga trigonometri dapat diperoleh dari table harga, atau menggunakan kalkulator, tetapi harga harga tertentu dapat diperoleh dengan cara mudah dengan sedikit menghapalkan pengertian tertentu. Harga-harga istimewa suatu fungsi trigonometri adalah 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, dan selang dengan 90^0, misalnya 120^0, 135^0, 150^0, dan sebagainya seperti pada Tabel 3 dibawah :

Tabel 3 Harga Fungsi Trigonometri

X	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
Sin x	0	1/2	$1/2\sqrt{2}$	$1/2\sqrt{3}$	1	$1/2\sqrt{3}$	$1/2\sqrt{2}$	1/2	0
Cos x	1	$1/2\sqrt{3}$	$1/2\sqrt{2}$	1/2	0	-1/2	$-1/2\sqrt{2}$	$-1/2\sqrt{3}$	-1
Tg x	0	$1/3\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	~	$-\sqrt{3}$	-1	$-1/3\sqrt{3}$	0
X	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
Sin x	0	-1/2	$-1/2\sqrt{2}$	$-1/2\sqrt{3}$	-1	$-1/2\sqrt{3}$	$-1/2\sqrt{2}$	-1/2	-0
Cos x	-1	$-1/2\sqrt{3}$	$-1/2\sqrt{2}$	-1/2	0	½	$1/2\sqrt{2}$	$1/2\sqrt{3}$	1
Tg x	0	$1/3\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	~	$-\sqrt{3}$	-1	$-1/3\sqrt{3}$	0

Dari Tabel 3 diatas fungsi trigonometri yang terdiri dari sin x, cosx, dan tg x dapat digambarkan seperti gambar dibawah :



Gambar 3 Grafik Fungsi Sinus, Cosinus dan Tangen

dari tabel gambar hubungan antara harga sinus dengn sinus, harga sinus dengan cosinus, yaitu :

1. Sin (180 - x) = Sin (x)
2. Sin (180 + x) = - Sin (x)
3. Cos (180 - x) = - Cos (x)
4. Cos (180 + x) = - Cos (x)
5. Sin (90 – x) = Cos (x)
6. Sin (90 + x) = Cos (x)
7. $\text{Sin}^2\ \alpha + \text{Cos}^2\ \alpha = 1$

Persamaan trigonometri mempunyai periodisitas sebesar k. 360^0.

Fungsi f(x) = sin x dan g(x) = cosx adalah fungsi periodik yang berperiode dasar 2Π atau 360^0, sedangkan fungsi h(x) = tgx dan l(x) = ctg x adalah fungsi periodik yang berperiode dasar Π atau 180^0.

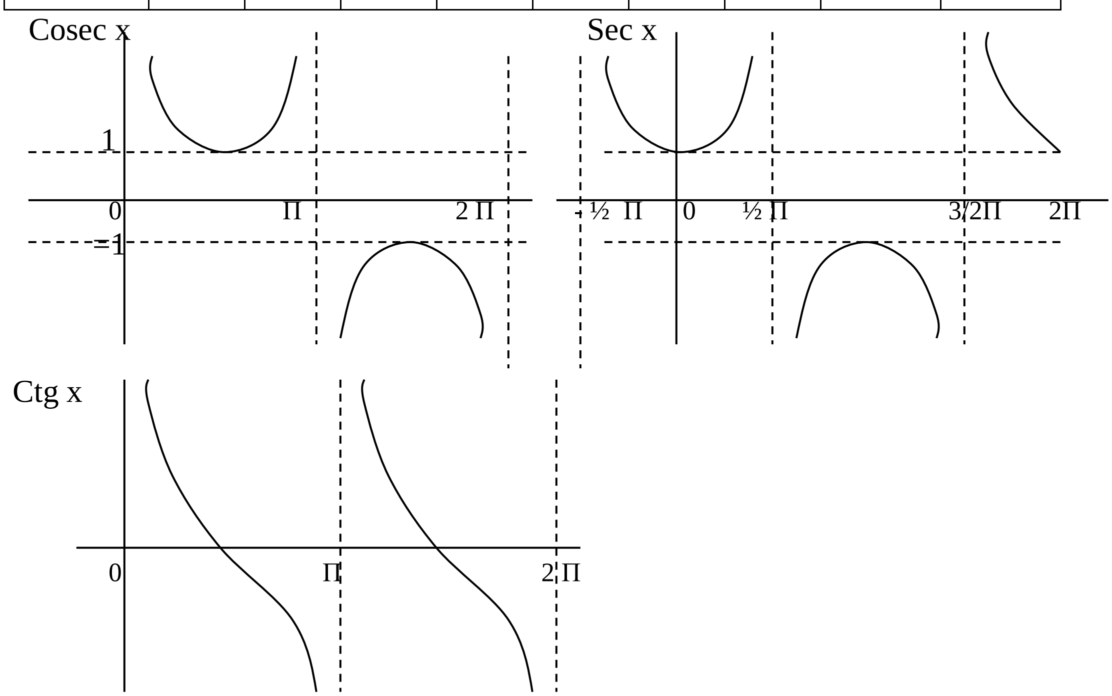
Untuk harga sin x dan cos x mempunyai marga mksimum dan minimum adalah 1 dan -1. Sedangkan untuk tg x mempunyai harga maksimum dn minimum ditak hingga, dan mempunyai harga asimtot pada garis x = ½Π dan 3/2Π pada interval 0 < x < 2Π.

1. sin (x + k.2Π) = sin x
2. Cos (x + k.2Π) = sin x
3. Tg (x + k.Π) = Tg x
4. Cosec (x + k.2Π) = cosec x
5. Sec (x + k.2Π) = Sec x
6. Ctg (x + k.Π) = Ctg x

Untuk harga Cosec x, Sec x dan Ctg x seperti pada tabel 4 dibawah :

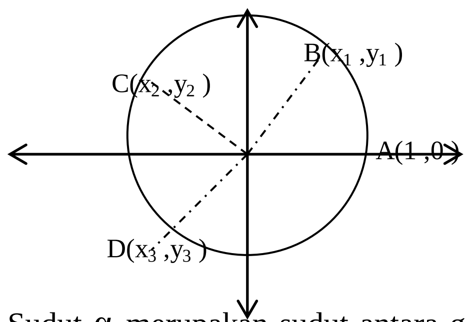
Tabel 4 Harga Cosecan, Secan dan Cotangen

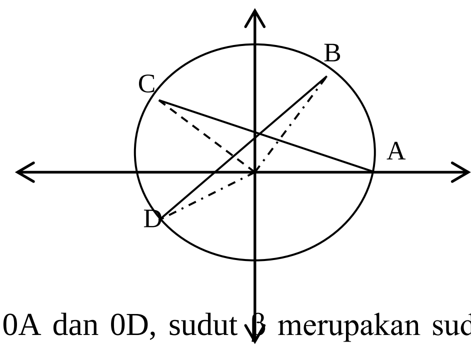
X	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
Cosec x	~	2	√2	2/3 √3	1	2/3 √3	√2	2	~
Sec x	1	2/3√3	√2	2	~	- 2	- √2	- 2/3√3	-1
Ctg x	~	√3	1	1/3 √3	0	-1/3 √3	-1	- √3	- ~
Cosec x	~	- 2	- √2	- 2/3 √3	-1	-2/3 √3	- √2	- 2	- ~
Sec x	-1	-2/3√3	-√2	- 2	~	2	√2	2/3√3	1
Ctg x	- ~	√3	1	1/3 √3	0	- 1/3 √3	-1	- √3	~



Gambar 4 Grafik fungsi Cosec x, Sec x dan Ctg x

C. RUMUS-RUMUS TRIGONOMETRI





Sudut α merupakan sudut antara garis 0A dan 0D, sudut β merupakan sudut antara garis 0A dan 0B. Persamaan lingkaran adalah $x_1^2 + y_1^2 = 1$, dan diasumsikan bahwa $0<\beta<\alpha<2\Pi$, maka :

$x_1 = \cos\beta$ dan $y_1 = \sin\beta$ $\quad$ $x_2 = \cos(\alpha-\beta)$ dan $y_2 = \sin(\alpha-\beta)$

$x_3 = \cos\alpha$ dan $y_3 = \sin\alpha$

dan panjang busur AC = pnjang busur BD, sehingga :

$$|AC| = |BD|$$

$$\sqrt{((x_2 - 1)^2 + (y_2 - 0)^2} = \sqrt{((x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$

$$(x_2^2 + y_2^2) + 1 - 2x_2 = (x_3^2 + y_3^2) + (x_1^2 + y_1^2) - 2x_1x_3 - 2y_1y_3$$

$$\cos^2(\alpha-\beta) + \sin^2(\alpha-\beta) + 1 - 2x_2 = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta) - 2x_1x_3 - 2y_1y_3$$

$$1 + 1 - 2x_2 = 1 + 1 - 2x_1x_3 - 2y_1y_3$$

$$x_2 = x_1x_3 + y_3y_1$$

dengan mensubstitusikan harga $x_1 = \cos\beta$ dan $y = \sin\beta$; $x_2 = \cos(\alpha-\beta)$ dan $y = \sin(\alpha-\beta)$ $x_3 = \cos\alpha$ dan $y_3 = \sin\alpha$, diperoleh persamaan :

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ (1)

untuk mendapatkan harga $\cos(\alpha+\beta)$ dengan melakukan substitusi harga :

$(\alpha+\beta) = (\alpha-(-\beta))$ sehingga $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta))$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$, karena $\cos(-\beta) = \cos\beta$ dan $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ maka :

$\mathbf{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$ **(2)**

menggunakan rumus fungsi ntrigonometri tentng hubungan sinis dan cosinus adalah :

$\sin \alpha = \cos(90 - \alpha)$ dan $\cos \alpha = \sin(90 - \alpha)$, sehingga :

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \cos(90 - (\alpha - \beta)) \\ &= \cos(90 - \alpha) - \beta) \\ &= \cos(90 - \alpha) \cos \beta + \sin(90 - \alpha) \sin \beta \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

$\mathbf{\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}$ **(3)**

untuk $(\alpha - \beta) = (\alpha + (-\beta))$

$\sin(\alpha + (-\beta) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta)$

$\mathbf{\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}$ **(4)**

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \rightarrow \quad \text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

$$\mathbf{tg(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \times \frac{1/(\cos \alpha \cos \beta)}{1/(\cos \alpha \cos \beta)}$$

$$= \frac{\mathbf{tg\,\alpha + tg\,\beta}}{\mathbf{1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta}} \qquad \mathbf{(5)}$$

$$\mathbf{tg(\alpha - \beta)} = \text{tg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg}(-\beta)}{1 - \text{tg } \alpha \text{ tg}(-\beta)} = \frac{\mathbf{tg\,\alpha + tg\,\beta}}{\mathbf{1 + tg\,\alpha\, tg\,\beta}} \qquad \mathbf{(6)}$$

Contoh 1 :

Tentukan harga Sin 75^0 dan Cos 75^0

Jawab :

$$\begin{aligned}\text{Sin } 75^0 &= \text{Sin } (30^0+45^0) = \text{Sin } 30^0 \text{ Cos } 45^0 + \text{Cos } 30^0 \text{ Sin } 45^0 \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{3})\end{aligned}$$

$\text{Cos } 75^0 = \text{Cos } (30^0+45^0) = \text{Cos } 30^0 \text{ Cos } 45^0 - \text{Sin } 30^0 \text{ Sin } 45^0$

$= \frac{1}{2}\sqrt{3}. \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2} . \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{3}. - \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$

Contoh 2 :

Tunjukkan Harga cos (90 + A) = - Sin A

Jawab :

Cos (90 + A) = Cos90 Cos A - Sin90 Sin A

= 0. Cos A – 1. Sin A = - Sin A (terbukti)

Contoh 3 :

Hitunglah nilai dari $\text{Sin } 42^0 \text{ Cos } 12^0 - \text{Cos } 42^0 \text{ Sin } 12^0$

Jawab :

$\text{Sin } 42^0 \text{ Cos } 12^0 - \text{Cos } 42^0 \text{ Sin } 12^0 = \text{Sin } (42^0 - 12^0) = \text{Sin } (30^0) = \frac{1}{2}$

Contoh 4 :

Jika $\dfrac{\text{tg } 80^0 + \text{tg } 55^0}{1 - \text{tg } 80^0 \text{ tg } 55^0} = ?$

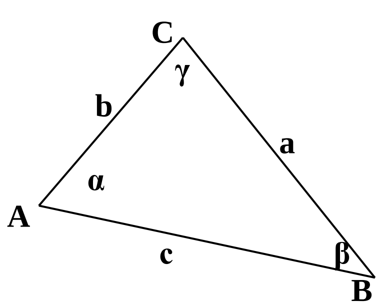
Jawab :

$$\frac{\text{tg } 80^0 + \text{tg } 55^0}{1 - \text{tg } 80^0 \text{ tg } 55^0} = \text{tg } (80^0 + 55^0) = \text{tg } (135^0)$$

$$= \text{tg } (180^0 - 45^0) = - \text{tg } 45^0 = -1$$

Rumus Trigonometri untuk segitiga

Hukum Sinus



BC = a, AC = b, dan AB = c

α = ∠ BAC, β = ∠ ABC, γ = ∠ ACB

Gambar 6 Segitiga Sembarang

Dalam trigonometri, **hukum sinus** ialah pernyataan tentang segitiga yang berubah-ubah . Jika sisi segitiga *a*, *b* dan *c* dan sudut yang berhadapan bersisi (huruf besar) *A*, *B* and *C*, dinyatakan sebagai hukum sinus :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Rumus Sinus diatas untuk menghitung sisi yang tersisa dari segitiga jika dua sudut dan satu sisinya diketahui. Juga dapat juga digunakan saat dua sisi dan satu dari sudut yang tak diketahui; dalam hal ini, rumus sinus ini dapat memberikan dua nilai penting untuk sudut . Sering hanya satu hasil akan menyebabkan seluruh sudut kurang dari 180°; dalam kasus lain, ada dua penyelesaian pada segitiga.

Rumus Sinus atau hukum Sinus dapat digambarkan dengan diameter d dan dituliskan sebagai :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = d.$$

Dapat ditunjukkan bahwa:

$$d = \frac{abc}{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{2abc}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2+2(a^4+b^4+c^4)}}$$

di mana S merupakan semi-perimeter

$$s = \frac{(a+b+c)}{2}$$

Hukum Cosinus

Hukum cosinus, atau disebut juga aturan cosinus, dalam trigonometri adalah aturan yang memberikan hubungan yang berlaku dalam suatu segitiga, yaitu antara panjang sisi-sisi segitiga dan cosinus dari salah satu sudut dalam segitiga tersebut.

Perhatikan gambar segitiga di kanan.

Aturan cosinus menyatakan bahwa:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

dengan γ adalah sudut yang dibentuk oleh sisi *a* dan sisi *b*, dan *c* adalah sisi yang berhadapan dengan sudut γ.

Aturan yang sama berlaku pula untuk sisi *a* dan *b*:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

bila panjang dua sisi sebuah segitiga dan sudut yang diapit oleh kedua sisi tersebut diketahui, maka kita dapat menentukan panjang sisi yang satunya. Sebaliknya, jika panjang dari tiga sisi diketahui, kita dapat menentukan besar sudut dalam segitiga tersebut. Dengan mengubah sedikit aturan cosinus tadi, kita peroleh:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Hukum Cosinus Pertama

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$$

$$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma$$

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$

Contoh 5:

Jika dalam suatu segitiga A, B, C seperi gambar 6 diatas, diketahui :

AB = 12 , BC = 8, $\alpha = 60^0$ dan $\beta = 45$

Tentukan panjang sisi CA

Jawab :

Jumlah sudut dalam segitiga adalah 180, $\alpha = 60^0$ dan $\beta = 45$ maka $\gamma = 75^0$

Menggunakan aturan SINUS :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \rightarrow \frac{a}{\sin 60^0} = \frac{8}{\sin 45^0} = \frac{12}{\sin 75^0}$$

$$\frac{a}{\sin 60^0} = \frac{8}{\sin 45^0} \rightarrow a \sin 45^0 = 8.\sin 60^0 \rightarrow a = (8.\ \tfrac{1}{2}\sqrt{3}) / \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

Jadi harga **a = 4 √6**

Menggunakan aturan COSINUS

$a^2 = b^2 + c^2 - bc \cos\alpha$

$a^2 = 8^2 + 12^2 - 8.12 \cos 60$

$= 64 + 144 - 96\ (1/2)$

$= 208 - 48 = 160 \rightarrow a = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

Rumus-rumus sudut rangkap

1. $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \sin\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$

2. $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

   $= (1 - \sin\alpha) - \sin\alpha = 1 - 2\sin\alpha$

3. $\text{tg } 2\alpha = \dfrac{2 \text{ tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}$

4. $\sin 2\alpha = \dfrac{2 \text{ tg } \alpha}{1 + \text{tg}^2 \alpha}$

5. $\cos 2\alpha = \dfrac{1 - tg^2 \alpha}{1 + tg^2 \alpha}$

Contoh 6 :

Buktikan $2\sin 30^0 \cos 30^0 = (2\, tg\, 30 / (1 + tg^2\, 30)$

Jawab :

$\sin 60^0 = \sin (30^0 + 30^0) = \sin 30^0 \cos 30^0 + \cos 30^0 \sin 30^0 = 2 \sin 30^0 \cos 30^0$

$= 2. \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} \sqrt{3} = \tfrac{1}{2} \sqrt{3}$

$\sin 60^0 = (2\, tg\, 30 / (1 + tg^2\, 30) = 2.1/3 \sqrt{3} / (1 + (1/3 \sqrt{3})^2)$

$= (2/3 \sqrt{3}) / (4/3) = \tfrac{1}{2} \sqrt{3}$

Rumus-rumus Perkalian

1). $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)$

$\sin \alpha \cos \beta = \tfrac{1}{2} (\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta))$

2). $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)$

$\cos \alpha \sin \beta = \tfrac{1}{2} (\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta))$

3). $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)$

$\cos \alpha \cos \beta = \tfrac{1}{2} (\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta))$

4). $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta)$

$\sin \alpha \sin \beta = \tfrac{1}{2} (\cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta))$

Contoh 7 :

Hitunglah : a) $2\, tg\, 75^0 \cos 15^0$ b) $\sin 105^0 \sin 15^0$

Jawab :

a) $2 \sin 75^0 \cos 15^0 = \sin (75^0 + 15^0) + \sin (75^0 - 15^0)$

$= \sin 90^0 + \sin 60^0 = 0 + \tfrac{1}{2} \sqrt{3} = \tfrac{1}{2} \sqrt{3}$

b) $\sin 105^0 \operatorname{Sin} 15^0 = \operatorname{Cos}(105^0 + 15^0) - \operatorname{Cos}(105^0 - 15^0)$

$= \operatorname{Cos}(120^0) - \operatorname{Cos}(90^0)$

$= -\frac{1}{2} - 0 = -\frac{1}{2}$

Rumus-rumus Jumlah dan Selisih

1). $\operatorname{Sin} x + \operatorname{Sin} y = 2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(x + y) \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(x - y)$

2). $\operatorname{Sin} x - \operatorname{Sin} y = 2 \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(x + y) \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(x - y)$

3). $\operatorname{Cos} x + \operatorname{Cos} y = 2 \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(x + y) \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(x - y)$

4). $\operatorname{Cos} x - \operatorname{Cos} y = 2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(x + y) \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(x - y)$

Contoh 8 :

Nyatakan dalam bentuk perkalian : a). $\operatorname{Sin} 5x + \operatorname{Sin} x$ b). $\operatorname{Cos} 5\theta + \operatorname{Cos} 3\theta$

Jawab :

a) $\operatorname{Sin} 5x + \operatorname{Sin} x = 2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(5x + x) \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(5x - x)$

$= 2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(6x) \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(4x)$

$= 2 \operatorname{Sin} 3x \operatorname{Cos} 2x$

b). $\operatorname{Cos} 5\theta + \operatorname{Cos} 3\theta = 2 \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(5\theta + 3\theta) \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(5\theta - 3\theta)$

$= 2 \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(8\theta) \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(2\theta)$

$= 2 \operatorname{Cos} 4\theta \operatorname{Cos} \theta$

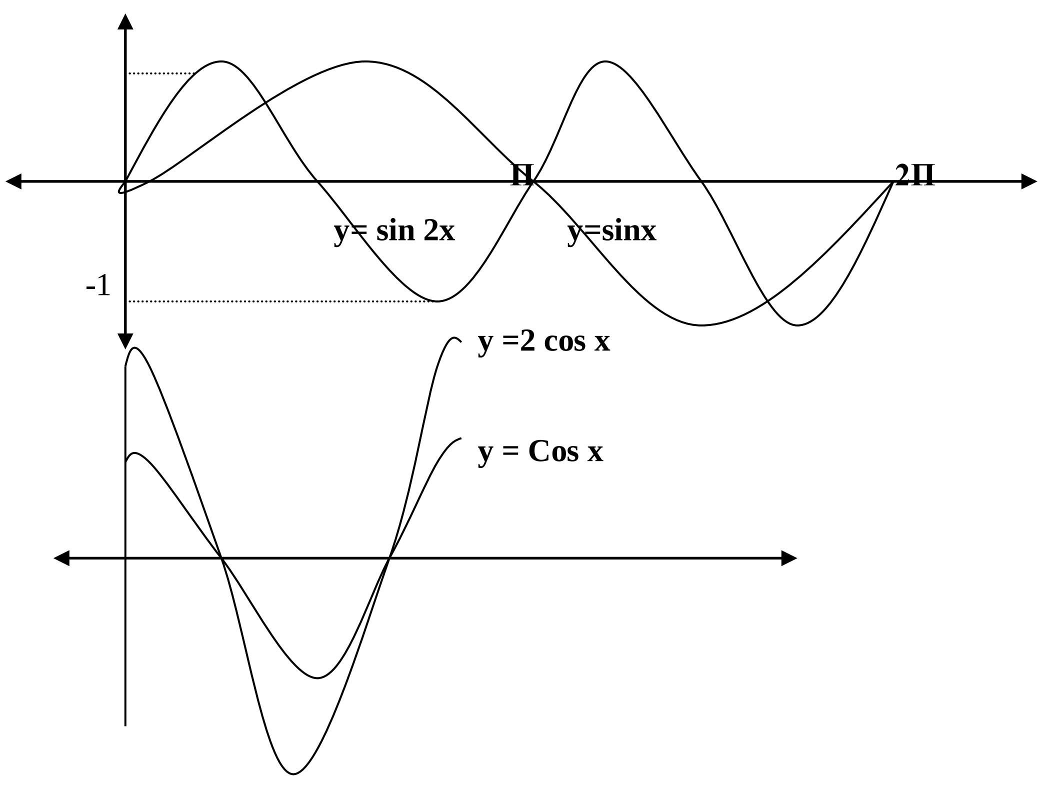
D. FUNGSI DAN GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI

Grafik fungsi dalam trigonometri, untuk harga sinus daan cosinusnya menpunyai periodisasi sebesar 360^0 (2Π), dan nilai maksimum dan minimum sebesar dan -1.

Untuk harga tangennya dengan periodisasi juga sebesar 360^0 (2Π), dan untuk harga maksimum dan minimumnya tak hingga dan minus tak hingga.

Untuk harga cosecant, secan, dan cotangennya juga mempunyai periodisasi sebesar 360^0 (2Π), dan untuk harga maksimum dan minimumnya tak hingga dan minus tak hingga. Untuk grafik fungsi sinus dan cosinus mempunyai amplitudo sebesar 1 yaitu diperoleh dari ½ (1 – (-1)) = ½ (2) = 1, dimana harga 1 merupakan i maksimum dan nilai -1 merupakan minimumnya. Harga maksimum dan minimum serta periodisasi suatu fungsi sinus dan cosinus dipengaruhi oleh fungsinya. Misalkan f(x) = n sin x atau g(x) = n cos x maka akan mempunyai harga maksimum dan minimum sebesar n dan –n dengan amplitude sebesar n juga, tetapi dengan periodisasi yang tetap sama yaitu 2 Π.

Fungsi f(x) = sin nx atau g(x) = cos nx, fungsi ini mempunyai maksimum dan minimum sebesar 1 dan -1 serta amplitudo sebesar 1, tetapi mempunyai periodisasi sebesar 2Π/ n. Apabila f (x) = a. sin bx atau g(x) = a cos bx, dapat disimpulkan bahwa fungsi tersebut mempunyai amplitude sebesar a dan periodisasi sebesar 2Π/ b.



Gambar 6 Grafik Fungsi Trigonometri

F. PERSAMAAN TRIGONOMETRI

Fungsi f(x) = sin(x), cos (x), tg (x) merupupakan fungsi trigonometri, disebut juga sebagai fungsi periodik. Hal ini dikarenakan fungsinya mempunyai periodisasi. Fungsi sin x, daan cos x mempunyai periode sebesar 360^0 atau 2Π. Sedangkan tg x mempunyi periodisasi 180^0 atau Π. Fungsi-fungsi f(x) = sec x, cosec x, mempunyai periodisasi sebesar 360^0 atau 2Π. Sedangkan untuk ctg x mempunyai periodisasi sebesar 180^0 atau Π.

Fungsi- fungsi tersebut daapat dituliskan persamaannya sebagai berikut :

1. Sin (x + k. 2Π.) = Sin x
2. Cos (x + k. 2Π.) = Cos x
3. Tg (x + k. Π.) = Tg x
4. Sec (x + k. 2Π.) = Sec x
5. Cosec (x + k. 2Π.) = Cosec x
6. Ctg (x + k. Π.) = Ctg x

1. Persamaan Trigonometri yang dapat dirubah kebentuk persamaan kwadrat dalam Sinus, Cosinus, dan tangen sebagai pengganti fungsinya

   Rumus lingkaran : $\text{Sin}^2 x + \text{Cos}^2 x = 1$, diperluas :

   $\text{Sin}^2 x = 1 - \text{Cos}^2 x$ atau $\text{Cos}^2 x = 1 - \text{Sin}^2 x$

   Apabila $\text{Cos}^2 2x = \text{Cos } 2x – 3 \text{ Sin}^2 2x$ maka

   $\text{Cos}^2 2x = \text{Cos } 2x – 3 (1 – \text{Cos}^2 2x)$

   $\text{Cos}^2 2x = \text{Cos } 2x – 3 + 3\text{Cos}^2 2x = \text{Cos } 2x + 3 \text{ Cos}^2 2x - 3$

   $2 \text{ Cos}^2 2x + \text{Cos } 2x - 3 = 0 \rightarrow 2 (\text{Cos } 2x)^2 + (\text{Cos } x) - 3 = 0$

Sehingga jika Cos 2x = p maka persamaannya : $2p^2 + p + 3 = 0$, $p_{1,}$ dan p_2

$$p_{1,} \text{ dan } p_2 = \frac{- b \pm \sqrt{(b^2 – 4ac)}}{2a}$$

Sehingga diperoleh :

$$\text{Cos } 2x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1^2 - 4.2.3)}}{2.2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1^2 - 4.2.-3)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4}$$

Cos 2x = 1 dan Cos 2x = - 3/2 (tidak mungkin karena $-1 \leq \cos 2x \leq 1$)

Untuk Cos 2x = 1 maka Cos 2x = Cos 0

2x = k.2Π maka **x = k.Π**

RANGKUMAN

1. a. Sinus α merupakan sisi dihadapan sudut (y) dibagi dengan sisi miring (r)
   b. Cosinus α merupakan sisi yang mengapit (x) dibagi dengan sisi miring (r)
   c. Tangen α merupakan sisi dihadapan sudut (y) dibagi sisi yang mengapit (x), atau Sin α dibagi Cos α

   a. $\text{Sin } \alpha = \dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{r}}$, b. $\text{Cos } \alpha = \dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{r}}$, c. $\text{Tg } \alpha = \dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$

   d. $\text{Cosec } \alpha = \dfrac{\mathbf{r}}{\mathbf{y}}$, e. $\text{Secan } \alpha = \dfrac{\mathbf{r}}{\mathbf{x}}$, f. $\text{Ctg } \alpha = \dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}$

2. Rumus penjumlahan sudut

   $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

   $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

   $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

   $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

3. Hukum Sinus

   $$\frac{a}{\text{Sin } \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

4. Hukum Cosinus

   $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c \text{ Cos } \alpha$

   $b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c \text{ Cos } \beta$

   $c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b \text{ Cos } \gamma$

5. Rumus Perkalian

   a). $2 \text{ Sin } \alpha \text{ Cos } \beta = \text{Sin } (\alpha + \beta) + \text{Sin } (\alpha - \beta)$

   $\text{Sin } \alpha \text{ Cos } \beta = \frac{1}{2} (\text{Sin } (\alpha + \beta) + \text{Sin } (\alpha - \beta))$

   b). $2 \text{ Cos } \alpha \text{ Sin } \beta = \text{Sin } (\alpha + \beta) - \text{Sin } (\alpha - \beta)$

   $\text{Cos } \alpha \text{ Sin } \beta = \frac{1}{2} (\text{Sin } (\alpha + \beta) - \text{Sin } (\alpha - \beta))$

c). $2 \cos \alpha \cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$

$\cos \alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$

d). $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$

$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta))$

LATIHAN

1. *Uraikan bentuk berikut dengan rumus jumlah dan selisih cosinus, kemudian sederhanakan :*

   a. $\cos(x - 60^0)$

   b. $\cos(x + 45^0)$

   c. $\cos(x - 120^0)$

   d. $\cos(x + 30^0)$

2. *Uraikan bentuk berikut dengan rumus jumlah dan selisih Sinus, kemudian sederhanakan :*

   a. $\cos(x - 60^0)$

   b. $\cos(x + 45^0)$

   c. $\cos(x - 120^0)$

   d. $\cos(x + 30^0)$

3. *Buktikan bahwa :*

   a. $\sin(90 - x) = \cos x$

   b. $\cos(270 + x) = \sin x$

   c. $\cos(180 - x) = -\cos x$

   d. $\sin(270 + x) = -\sin x$

4. *Hitunglah harga tanpa menggunakan alat bantu:*

   a. $\sin 15^0$ b. $\cos 105^0$

   c. $\text{Tg } 15^0$ d. $\text{Ctg } 105^0$

5. Jika tg A = 1 dan tg B = √3, tentukan harga :

a. Tg (A + B)

b. Tg (A – B)

6. Buktikan bahwa :

$$\text{Tg}(a + 45) = \frac{\text{Cos } a + \text{Sin } a}{\text{Cos } a - \text{Sin } a}$$

7. Nyatakan bentuk-bentuk dibawah dalam bentuk 2α

a. $4 \text{ Cos } \alpha . \text{ Sin } \alpha$

b. $\text{Cos}^2\alpha - \text{Sin}^2\alpha$

b. $2 \text{ Sin}^2\alpha - 1$

d. $1 - 2 \text{ Cos}^2\alpha$

8. Sederhanakan bentuk-bentuk dibawah :

a. $2 \text{ Sin}3\alpha . \text{ Cos}3\alpha$

b. $2 \text{ Cos } 2\alpha . \text{ Sin}2\alpha$

c. $2 \text{ Cos}^2\alpha - 1$

d. 2 Sin 75. Cos 75

9. Nyatakan setiap bentuk-bentuk dibawah dalam perkalian :

a. Sin 6x + Sin 2x

b. Cos 5x + Cos x

c. Sin 6x - Sin 2x

d. Cos 5x - Cos x

e. Sin 3θ + Sin θ

f. Cos 7x + Cos 3x

10. Cari harga dari penjumlahan dan pengurangan dibawah ini

    a. Sin 75 – Sin 15

    b. Cos 105 + Cos 15

    c. Cos 15 – Cos 75

    d. Sin 105 + Sin 15

11. Hitunglah nilai :

    a. Cos 40.Cos 20 – Sin 40. Sin 20

    b. Sin 80 Cos 20 - Cos 80 Sin 20

    c. Cos 50.Cos 20 + Sin 50. Sin 20

    d. Sin 10 Cos 35 + Cos 10 Sin 35

12. Lukislah Grafik Fungsi :

    a. 2 Cos ½ x

    b. ½ Sin 2x

    c. Tg 2x

    d. Tg ½ c

    e. Cosecan 2x

    f. Sec ½ x

13. Tentukan himpunan penyelesaian dari :

    a. Sin 2x = Sin 3x + Sin x, $0 \le x \le 2\Pi$

    b. 6 Cos 2x – 11 Cos x + 8 = 0 $0 \le x \le 2\Pi$

    c. Sin 2x = Sin x $0 \le x \le 2\Pi$

14. Jika Fungsi Y = 2 Sin^2 x - Cos 2x – 1, dan $0 \le x \le 2\Pi$

    Tentukan interval harga x untuk grafik diatas sumbu x

15. Tentukan himpunan penyelesaian untuk :

    a. 4 Cos^2 2x + 12 Sin 2x – 12 = 0, untuk $0 \le x \le 2\Pi$

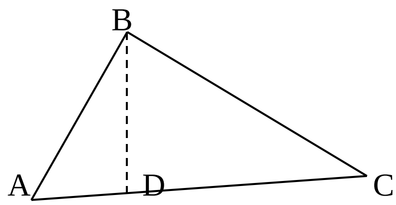
    b. 3 Cos 2x - 10 Cos x + 7 = 0, untuk $0 \le x \le 2\Pi$

    c. Cos^2 2x – 5 Sin 4x – 6 Sin^2 2x = 0, untuk $0 \le x \le 2\Pi$

TEST FORMATIF

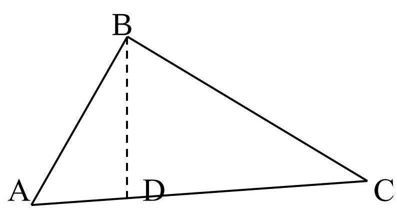
1. Tentukan Harga Cos 195^0
   a. $-\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$
   b. $-\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$
   c. $\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$
   d. $\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$
2. Tentukan Harga Sin 345^0
   a. $-\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$
   b. $-\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$
   c. $\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$
   d. $\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$
3. Hitunglah nilai dari Sin 59^0 Cos 14^0 – Cos 59^0 Sin 14^0
   a. $\frac{1}{2}$
   b. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   c. $-\frac{1}{2}$
   d. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
4. Hitunglah nilai dari Sin 15^0 Sin 30^0 – Cos 15^0 Cos 30^0
   a. $\frac{1}{2}$
   b. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   c. $-\frac{1}{2}$
   d. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
5. Jika sisi a dihadapan sudut α, dan sisi b dihadapan sudut β dan sisi c dihadapan sudut γ. Harga $a = 4$, $b = 6$, dan harga sudut $\gamma = 30^0$, tentukan panjang sisi c
   a. 4
   b. .$\sqrt{48}$
   c. 8
   d.$\sqrt{28}$

6. Segitiga ABC, panjang AB = 6, garis BD tegak lurus garis AC, sudut BAD = 45^0, dan sudut BCD = 30^0, tentukan panjang BD



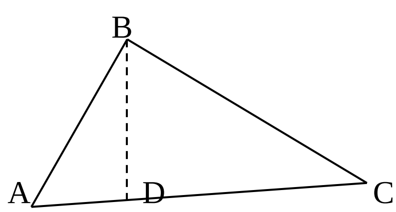
a. 3
b. $5\sqrt{2}$
c. 5
d. $3\sqrt{2}$

7. Segitiga ABC seperti pada no 4, garis BD tegak lurus garis AC, sudut BAD = 45^0, dan sudut BCD = 30^0, tentukan panjang BC



a. 6
b. $6\sqrt{2}$
c. 8
d. $8\sqrt{2}$

8. Segitiga ABC seperti pada no 4, garis BD tegak lurus garis AC, sudut BAD = 45^0, dan sudut BCD = 30^0, tentukan panjang AC



a. 8,6
b. $8\sqrt{3}$
c. 11,6
d. $11\sqrt{3}$

9. Persamaan $4\,\mathrm{Cos}^2x + \mathrm{Sin}\,2x - 6\,\mathrm{Sin}^2x = 0$,

a. $x = 30^0 + k.180^0$ dan $x = 146{,}31^0 + k.180^0$
b. $x = 60^0 + k.180^0$ dan $x = 146{,}31^0 + k.180^0$
c. $x = 45^0 + k.180^0$ dan $x = 146{,}31^0 + k.180^0$
d. $x = 15^0 + k.180^0$ dan $x = 146{,}31^0 + k.180^0$

10. Tentukan Himpunan Penyelesaian dari Tg $(2x - 40)^0$ – Ctg $50^0 = 0$

a. $x = 40^0 + k.90^0$ b. $x = 30^0 + k.90^0$

c. $x = 60^0 + k.90^0$ d. $x = 80^0 + k.90^0$

Cocokkan jawaban saudara dengan kunci jawaban test formatif 1 yang terdapat pada bagian akhir Modul ini. Hitunglah jawaban saudara yang benar. Kemuadian gunakan rumus dibawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Saudara terhadap materi Modul ini.

Rumus :

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban saudara yang benar}}{10} \times 100\ \%$$

Arti tingkat penguasaan yang saudara peroleh adalah :

80 – 100 % = Baik Sekali

70 – 79 % = Baik

60 – 69 % = Cukup

< 60 % = Kurang

Bila saudara memperoleh tingkat penguasaan 70 % atau lebih saudara dapat melanjutkan ke Modul berikutnya. Sedangkan jika tingkat penguasaan Saudara dibawah 70% saudara wajib mengulangi Modul ini, terutama pada bagian yang belum saudara kuasai.

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, Frank. 1981. *Teory and Problem of Calkulus*. : McGraw-Hill, Singapore.

Anton.1992. *Aljabar Linier Elementer*. Erlangga, Jakarta.

Bartle, Robert Gardner. 1927. *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons, Inc. USA.

Budi, Wono Setyo. 1995. *Aljabar Linier*. Gramedia. Jakarta.

Hendrawan, Andi. 2001. *Hitung Deferensial*. Debut Press. Yogyakarta.

Howard, Hutahaean. 1983. *Kalkulus Deferensial dan Integral*. Gramedia. Jakarta.

Keedy & Bittinger. 1986. Algebra and Trigonometry. Addison Wesley Publising Company. California

Leitold, Louis. 1987. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitis*. Bina Aksara. Jakarta.

Nasution, Andi Hakim. 1971. *Landasan Matematika*. Bhatara. Jakarta

Rawuh, *Matematika Pendahuluan*, Penerbit ITB. Bandung

Seputro, Theresia, 1989. *Pengantar Dasar Matematika*. Depdikbud. Jakarta.

Soepranto, J. 1979. *Pengantar Matrik*. Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi UI. Jakarta.

Wongso Sutjitro, Sutomo. 1974. *Ilmu Ukur Tanah*. Swada. Bandung.